

離散パルベ方程式

—その多様性と今後の展望—

同志社大学工学部 梶原 健司¹

概要

この報告では離散パルベ方程式 (Discrete Painlevé Equations) と呼ばれる一群の差分方程式の研究の現状を概観する。特に、筆者が興味を持ってきたさまざまな特殊解, Lax 対, 退化など, 現在までに得られている結果をまとめ, 今後の研究の展望について触れる。

目次

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | はじめに | 2 |
| 1.1 | ソリトン理論とソリトン方程式の離散化 | 2 |
| 1.2 | パルベ方程式とソリトン方程式 | 3 |
| 1.3 | 離散パルベ方程式 | 3 |
| 1.4 | 離散パルベ方程式研究の現状 | 4 |
| 2 | 離散系における可積分性と特異点閉じ込め | 4 |
| 2.1 | 特異点閉じ込め | 4 |
| 2.2 | 離散系の可積分性 | 5 |
| 3 | 離散パルベ方程式のリスト | 7 |
| 4 | 離散パルベ方程式の導出 | 9 |
| 4.1 | 直交多項式と離散パルベ方程式 | 9 |
| 4.2 | SC を用いた導出 | 11 |
| 4.3 | その他の導出 | 12 |
| 4.3.1 | Discrete AKNS Hierarchy からの導出 | 12 |
| 4.3.2 | パルベ方程式の Bäcklund および Schlesinger 変換からの導出 | 12 |
| 4.3.3 | 他の離散パルベ方程式からの退化 | 13 |
| 5 | 離散パルベ方程式の性質: 特殊解 | 13 |
| 5.1 | パルベ方程式の特殊函数解 | 13 |
| 5.2 | 離散パルベ方程式の特殊函数解 | 15 |
| 5.3 | 有理解 | 20 |
| 5.4 | 分子解 | 21 |
| 5.5 | その他の離散パルベ方程式に対する解 | 23 |
| 6 | 離散パルベ方程式研究の今後の展望 | 23 |

¹ e-mail: kaji@elrond.doshisha.ac.jp

1 はじめに

本報告では離散パルベ方程式と呼ばれるある種の常差分方程式のファミリーを扱う。離散パルベ方程式は

- 特異点閉じ込めと呼ばれる，離散版のパルベ性と見なされている性質を持ち，
- 連続極限で通常のパルベ方程式に移行する

差分方程式である。筆者はソリトン理論の立場から離散パルベ方程式の，特に特殊解を研究してきた。本報告では，まずソリトン方程式の理論の発展から始め，離散パルベ方程式が導出・研究されてきた過程を簡単に述べ，特殊解を中心に研究の現状をまとめて報告する。最後に今後の離散パルベ方程式研究の展望について私見を述べたい。

1.1 ソリトン理論とソリトン方程式の離散化

ソリトン方程式に代表される非線形可積分系の理論は大きな成功を収め，物理学などを含む広い意味での数理学全体に大きな影響を与えている。微分方程式，すなわち連続系に関しては 1980 年代初頭に発表されたいわゆる「佐藤理論」が非線形可積分系に対する統一的代数構造理論として広く受け入れられ，特に場の理論など解けるモデルが重要な意味を持つ分野では一種の基礎理論として用いられている。

さて，可積分系といえども，その「可積分性」の本質は背後の代数的な構造にあり，解析的な性質の解明はまた別問題である。すなわち，ある方程式が可積分だとしても，一般の初期値境界値問題が「解ける」わけではない。物理や工学の観点からはさまざまな初期値や境界値に関する知見を得るために数値解析が重要な役割を果たすが，高精度の数値解析を行うことはそう簡単なことではない²。安定かつ高精度な数値計算スキームが必要であるという実際的な問題から，Hirota や Ablowitz らは「可積分性を保存した独立変数の離散化」を考察した [1,2]。特に Hirota による双線形形式をベースにした研究は大きな成功を収め，さまざまな方程式に対する離散化が行われ，ソリトン解などの特殊解の構成，Lax 対，無限個の保存量の構成など，数理構造の解明も進んだ。特に顕著であったのは，現在 Hirota-Miwa 方程式と呼ばれる一種の「master equation」の発見であった [3,4]。もちろんそれ自身可積分であり，この方程式からさまざまな極限を取ることによって既知のソリトン方程式の多くが導かれた。その背後にある数理構造は Miwa によって解明され，それを応用してさらに多くのソリトン方程式の離散化がなされた。

さて，その後，筆者らは離散化の手続きの中で通常定数に取られる格子間隔を，独立変数の任意函数に拡張し得ることを指摘し，特別な場合としてソリトン方程式の q -差分系への拡張を得た [5]。この結果は Hirota によって再発見され，ソリトン方程式は一般の差分商を使った差分系にまで拡張された [6]。差分商による離散化は非常に一般的なものであり，拡張できるところまで拡張することにより反ってきれいな構造が見えかしてくれていることが Hirota らのグループにより指摘されている。

さらに，Takahashi らは「究極の離散系」であるセル・オートマトン系を考察し，ソリトンだけからなる「ソリトン・セル・オートマトン」を提案した [7]。この系は長い間謎めいたものであったが，最近，Tokihiko らの研究により「超離散化」と呼ばれる一種の非解析的極限操作によって既知の離散ソリトン方程式から組織的にソリトン・セル・オートマトンが得られることがわかった [8]。得られる方程式は+と max という演算だけからなる代数系 (max-plus algebra) の上の方程式であり，組み合わせ論などの離散数学と可積分系を結び付けると期待され，さらに，工学への応用も真剣に検討されている。また，超離散化は可積分性とは独立の手続きであるため，非可積分系，特に chaotic な振る舞いを示す系に対する手法としても注目されており，さらなる発展が期待されている。

² 簡単な Korteweg-de Vries 方程式でも，厳密解である 1-ソリトン解を安定に伝搬させるスキームを開発することさえなかなか大変なことである。

1.2 パンルベ方程式とソリトン方程式

さて、パンルベ方程式は 19 世紀終りから 20 世紀初めにかけて Painlevé らによって、いわゆるパンルベ性「初期値に位置が依存する特異点が高々極しかない」という性質をもつ非自明な常微分方程式として提出された、6 種の 2 階の非線形常微分方程式であるが、その重要性が広く認識されるには 1970 年代まで待たなければならなかった。現在、パンルベ方程式は広い意味での可積分系の理論に頻繁に現れ、その解はまさに「非線形世界の特殊函数」の役割を果たしている。ソリトン方程式との関連では、パンルベ方程式はソリトン方程式の相似解や進行波解を記述する常微分方程式として現れる。これは線形偏微分方程式を変数分離などの手法によって常微分方程式に帰着させたときに特殊函数が現れるということに全く対応している。例として典型的なソリトン方程式である modified Korteweg-de Vries 方程式

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.1)$$

を考え、相似解を仮定した特殊化 (similarity reduction) を行ってみることにする。今、

$$u(x, t) = \frac{w(z)}{(3t)^{1/3}}, \quad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \quad (1.2)$$

と仮定し、これを方程式に代入すると、

$$w''' - 6w^2w' - (zw)' = 0, \quad (1.3)$$

が得られる。 w' を両辺にかけると一度積分でき、その結果 α を積分定数として、

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \quad (1.4)$$

が得られる。この常微分方程式は Painlevé II 方程式に他ならない。

また、重要なことは、パンルベ性が可積分性を特徴づける性質の一つとされる点である。これに関しては、Ablowitz-Ramani-Segur の予想 [9,10]

非線形偏微分方程式は、厳密な reduction によって得られるあらゆる非線形常微分方程式が、おそろしく変数変換をした後、全てパンルベ性を持つときにのみ、逆散乱変換で解ける

が状況をかなり正確に表しているものと思われる。非常に微妙な点はあるものの、おおざっぱに言って、非線形偏微分方程式に対して適当な reduction によって常微分方程式に帰着させたとき、もしそれが Painlevé 性を持つならばその方程式は可積分系である可能性がある、ということになる。また、類似の性質を偏微分方程式に対して直接調べるためのテストも開発されている [11,12]。

1.3 離散パンルベ方程式

さて、パンルベ方程式がソリトン方程式の reduction として現れること、また、ソリトン方程式の離散化が成功していることから、Painlevé 方程式の離散化も可能であると期待された。一つの離散化は全く別の文脈（モノドロミー保存変形の理論）から Jimbo, Miwa によってなされ [30]、それらはモノドロミー指数（パンルベ方程式のパラメータに相当する）を変化させたときの漸化式として得られた。それとは独立に、1990 年のほぼ同時期に 2 次元量子重力のあるモデルの分配函数を計算する際に得られた差分方程式が連続極限でパンルベ方程式に帰着すること、それを使って分配函数の漸近挙動が計算できることが相次いで発見された [32–34]。さらに、Grammaticos らはある種の可積分写像を研究している際に、それらの特異点が共通してある性質を持つことを見だし、それがパンルベ性の離散版と見なせること、また、2 次元量子重力で見つかった差分方程式が同じ性質を持つことを発見した [25]。その性質を彼らは「特異点閉じ込め」(Singularity Confinement, SC) と名付け、それを可積分性の判定条件として用いることによって Painlevé I – V 方程式に対応する離散パンルベ方程式を構成した [31]。後述するように、現在ではさまざまな手法で非常に多くの離散パンルベ方程式が得られている。

1.4 離散パンルベ方程式研究の現状

パンルベ方程式は今世紀初頭に提出されて以来、数理物理学などから刺激を受け、さまざまな側面から研究され続けてきた。それらの結果を抽出して線形方程式のモノドロミー保存変形としての定式化や [30], Hamilton 系であることを用いて正準変換を効果的に用いた理論などが構築されてきた [14–17]。その流れと比較すると、現在の離散パンルベ方程式研究の現状はまだまだ「データ収集」の段階である。すなわち、背後に何か大きなものがあるということは見えかくれしているのだが、

- 補助線形問題, Lax pair
- Bäcklund, Schlesinger 変換
- 特殊解やその行列式表示, すなわち τ 函数 (の特別な場合)
- 退化

などが個別に議論され、それらのデータはまだまだバラバラであるように思われる。その理由としては、

- 連続極限でパンルベ方程式の理論に帰着するような理論はいくらでも有り得る
- その中で、どのような理論が「よい理論」なのかはアприオリにはわからない
- 連続極限で消えてしまうような情報が離散系では本質的である
- 連続系 (微分方程式) でうまく使える理論 (手法) が離散系ではそのままでは使えない

という事情を挙げておこう。逆に、この事情はそのまま「離散系の世界は全く新しい宝の山である」ということにもなるかも知れない。

今後はこれらのデータをより多く、深いレベルで収集すると同時にそこからどのような数理を、如何に抽出していくかが問題であると思われる。

2 離散系における可積分性と特異点閉じ込め

2.1 特異点閉じ込め

この節では Grammaticos らが 離散パンルベ方程式の導出に用いた特異点閉じ込め (SC) について簡単に説明する。ある差分方程式が「SC テストに通る」とはその差分方程式が次のような性質を持つことを言う。

1. 初期値に依存して特異性が現れたとき、その特異性は有限ステップで打ち消しあってなくなってしまう。
2. 特異点を通過しても初期値の情報は失われていない。

Grammaticos らは Quispel 系と呼ばれる、保存量を持つという意味で「可積分」な一群の 2 階常差分方程式 [29] が共通してこの性質を持つことを見だし、これはパンルベ性の離散版であると主張した。さらに、これは与えられた差分方程式が「可積分」かどうかの判定や、一群の差分方程式の中から「可積分」な方程式を抽出することに対して極めて簡単で強力な手法となる。

例：簡単な例として、2 階常差分方程式

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{ax_n}{1 - x_n^2}, \quad a : \text{const.},$$

を考える．例えば， $x_0 = p$, $x_1 = \pm 1$ になったとすると，次の x_2 で特異性が生じる．そこで， $x_1 = 1 + \varepsilon$ において逐次的に計算を続ける．

$$\begin{aligned} x_0 &= p, \\ x_1 &= 1 + \varepsilon, \\ x_2 &= -\frac{a}{2}\varepsilon^{-1} + \frac{-a - 4p}{4} + O(\varepsilon), \\ x_3 &= -1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ x_4 &= -p + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

これからわかるように， x_2 で現れた特異性と x_3 で現れた -1 による特異性がうまく打ち消しあうことで x_4 が有限値になり，さらに x_4 に初期値 p の情報が残っている．これにより，上の差分方程式は SC テストに通ったことになる．

方程式を少し一般化して， f_n を n の任意函数として，

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{f_n x_n}{1 - x_n^2},$$

を考えてみよう．この場合も $x_n = p$, $x_{n+1} = 1 + \varepsilon$ から始めて同様に計算すると， x_{n+4} で特異性が打ち消される条件として，

$$f_{n+3} - 2f_{n+2} + f_{n+1} = 0,$$

が得られる．すなわち， $f_n = an + b$ という場合にのみこの方程式は SC テストに通るということになる．実は，このようにして得られる方程式は離散パルペ方程式の一つである． ■

ここで，重大な注意をしておきたい．今までの議論で

果たして SC テストに通ったからといってその方程式を「可積分」と考えてよいのか？

という根本的な疑問が湧いてくるであろう．ところが，離散系において「可積分性」という概念は連続系以上に確立されていないのである．従って，現状ではこの疑問に対して厳密な意味では答えようがない．ではなぜ SC に通ったからといって「よい方程式」とするのであるのか？

2.2 離散系の可積分性

そもそも「可積分性」とは何だろうか．元来「可積分性」は有限自由度の Hamilton 力学系に対する概念であった．すなわち，有名な Liouville–Arnold の定理 [20]

自由度 N の Hamilton 系に N 個の保存量があり，それらが Poisson 括弧に関して互いに可換 (involutive) ならば，初期値問題は有限回の求積操作（四則演算，微分，積分，逆函数をとること，微分積分を含まない方程式の解を求める演算）によって解ける．

が成り立つ系，すなわち「初期値問題が求積操作の有限回の繰り返して解ける」のが「可積分系」である．それがソリトン方程式などの無限自由度系に関してはどうだろうか？ここになると実はかなり怪しくなる．一般には

- 逆散乱法で解ける：適当な境界条件の下での初期値問題を解くことが線形の積分方程式を解くことに帰着する，という意味で「可積分」
- Lax pair の存在：ほとんどの場合逆散乱法の手順にのる．

- Liouville-Arnold の意味での「可積分」．すなわち，適当なポアソン構造の下で無限個の involutive な保存量が存在すること．
- Bi-Hamilton 構造：異なるポアソン構造を持つ二通りの Hamilton 系として定式化できること．これから Liouville-Arnold の意味での可積分性が従うことが言える．
- 無限個の保存量・対称性の存在．
- N-ソリトン解の存在：広いクラスの解が厳密に求まるという意味での「可積分性」(逆散乱法でも厳密に解が求まるのはソリトン解などの特別な場合だけである)．
- Bäcklund 変換の存在：これがあれば大体簡単な解から逐次的にソリトン解などが求まる．
- パンルベ性：特異点に関する性質．

のどれかが成り立てば「可積分」と考えられているようである．有限自由度系の類推からもっとも素直に見えるのは Liouville-Arnold の意味での可積分性だが，実は肝心の初期値問題に関する言明が抜けてしまっている．初期値問題との関連で言えば，最初の「逆散乱法で解ける」ことが正統的であるように見える．ほとんどの典型的なソリトン方程式の場合にはこれらの性質が全て成り立つが，これらの性質が厳密な意味で等価であることは全く証明されていない．むしろ，幸い物理的にあまり重要でない場合が多いのだが，それらの同値性に関する反例すらあるのである．

それでは，離散系についてはどうだろうか？ 離散系については上の性質のかなりの部分がさらに怪しくなる．

- Lax pair は多くの差分方程式に対して構成されているが，形式的である．差分方程式(微分差分方程式は除く)に対して逆散乱法ライクな方法で初期値問題が解析された例は，少なくとも筆者は知らない．
- Liouville-Arnold の意味での可積分性に関しては，まだ確立された「離散時間 Hamilton 系」の概念がない．
- Lax pair があれば，少なくとも形式的な保存量(保存密度)は作れる．対称性に関しては筆者の知る限りまだほとんど研究されていない．
- N-ソリトン解の存在は，多くの差分方程式に関して示されている．連続系における状況と似通っている多分唯一の性質であろう．

当然，それらの性質の同値性などはほとんど議論されていない．従って，離散系では何をもって可積分と称するかが全くはっきりしないのである．

では離散系のパンルベ性に相当する概念は何だろうか．実は，Grammaticos らは SC がまさにそれであると主張する．確かに通常のパンルベ性と似ており，N-ソリトン解の存在という意味で可積分であることがわかっている差分方程式に SC テストを適用すると確かに通る．このように，類似性はあるが，まだ有力な反例はないのであるが，SC の厳密な意味での妥当性や数学的根拠は全くわかっていないのが現状である．平たく言えば，

SC は強力かつ有効だが，なぜうまくいくのかはさっぱりわからない

とわけである．

補足：

- ソリトン方程式では N-ソリトン解などの構成に Hirota の直接法が強力であるが，離散系ではこの方法の適用がかなり難しい．ところが，SC を適用した際に現れる特異点の伝搬パターンを補助的に用いることによって，まったく簡単に直接法の適用が可能になる [26,27]．従って，SC は可積分性を(一応)判定し，それから routine work で解も構成できる，という優れた方法であることになる．
- SC テストには通るがカオティックな挙動を示すようなある種の常差分方程式，すなわち SC テストに通れば可積分である，という主張に対する反例が最近報告されている [28]．

3 離散パルベ方程式のリスト

この節では、パルベ方程式と、連続極限で対応する離散パルベ方程式の具体的な形を可能な限り列挙する。以下、微分方程式については y が従属変数、 x が独立変数と、また差分方程式については x_n が従属変数、 n が独立変数とし、それら以外の文字は全てパラメータとする。

(1) P_I :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x, \quad (3.1)$$

d P_I :

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{an + b}{x_n} + c, \quad (3.2)$$

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{an + b}{x_n} + c, \quad (3.3)$$

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{an + b}{x_n} + \frac{c}{x_n^2}, \quad (3.4)$$

$$x_{n+1}x_{n-1} = \frac{aq^n}{x_n} + \frac{b}{x_n^2}, \quad (3.5)$$

$$x_{n+1}x_{n-1} = aq^n + \frac{b}{x_n}, \quad (3.6)$$

$$x_{n+1}x_{n-1} = ax_n + bq^n, \quad (3.7)$$

$$(x_{n+1} + x_n)(x_n + x_{n-1}) = (x_n + an + b)^2 - c^2, \quad (3.8)$$

$$(x_{n+1}x_n - 1)(x_nx_{n-1} - 1) = aq^n x_n, \quad (3.9)$$

$$(x_{n+1}x_n - 1)(x_nx_{n-1} - 1) = 1 - aq^n x_n, \quad (3.10)$$

$$(x_{n+1} + x_n)(x_n + x_{n-1}) = \frac{(x_n + an + b)(x_n^2 - c^2)}{x_n - an - b}. \quad (3.11)$$

(3.2) は 2 次元量子重力の理論から導かれた方程式であることを注意しておく。

(2) P_{II} :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 + xy + \alpha, \quad (3.12)$$

d P_{II} :

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an + b)x_n + c}{1 - x_n^2}, \quad (3.13)$$

$$\frac{an + b}{x_{n+1}x_n + 1} + \frac{a(n-1) + b}{x_nx_{n-1} + 1} = -x_n + \frac{1}{x_n} + (an + b) + c, \quad (3.14)$$

$$x_{n+1}x_{n-1} = a \frac{x_n + q^n}{x_n(x_n + 1)}, \quad (3.15)$$

$$x_{n+1}x_{n-1} = \frac{aq^n x_n + b}{x_n + cq^n}, \quad (3.16)$$

$$(x_{n+1} + x_n)(x_n + x_{n-1}) = \frac{(x_n + an + b + c)(x_n^2 - d^2)}{x_n - 2an - 2b}, \quad (3.17)$$

$$(x_{n+1}x_n - 1)(x_nx_{n-1} - 1) = \frac{aq^{2n}x_n}{bx_n + cq^n}, \quad (3.18)$$

$$(x_{n+1}x_n - 1)(x_nx_{n-1} - 1) = (1 - aq^n x_n)(1 - bq^n x_n), \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

(3.13) はやはり量子重力の理論から導かれた方程式であることを注意しておく。

(3) \mathbf{P}_{III} :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} (\alpha y^2 + \beta) + \gamma y + \frac{\delta}{y}, \quad (3.21)$$

\mathbf{dP}_{III} :

$$x_{n+1}x_{n-1} = \frac{ab(x_n - cq^n)(x_n - dq^n)}{(x_n - a)(x_n - b)}, \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(an + b)y_n + c}{1 - y_n^2}, \\ y_{n+1} + y_{n-1} = \frac{(a(n - 1/2) + b)x_n + c}{1 - x_n^2}, \end{cases} \quad (3.23)$$

(4) \mathbf{P}_{IV} :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \quad (3.24)$$

\mathbf{dP}_{IV} :

$$(x_{n+1} + x_n)(x_n + x_{n-1}) = \frac{(x_n^2 - c^2)(x_n^2 - d^2)}{(x_n - an - b)^2 - g^2}, \quad (3.25)$$

$$(x_{n+1}x_n - 1)(x_nx_{n-1} - 1) = \frac{aq^{2n}(x_n^2 + 1) + bq^{2n}x_n}{cx_n + dq^n}, \quad (3.26)$$

$$(x_{n+1}x_n - 1)(x_nx_{n-1} - 1) = \frac{(x_n - aq^n)(x_n - b)(x_n - 1/b)}{1 - x_nq^{-2n}}, \quad (3.27)$$

(5) \mathbf{P}_{V} :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{(y-1)^2}{x^2} \left(\alpha + \frac{\beta}{y} \right) + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}, \quad (3.28)$$

\mathbf{dP}_{V} :

$$(x_{n+1}x_n - 1)(x_nx_{n-1} - 1) = \frac{abq^n(x_n - c)(x_n - 1/c)(x_n - d)(x_n - 1/d)}{(x_n - aq^n)(x_n - bq^n)}, \quad (3.29)$$

(6) \mathbf{P}_{VI} :

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right\} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right\} \frac{dy}{dx} \\ & + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left\{ \alpha + \frac{\beta x}{x^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$\mathbf{d}(q)\mathbf{P}_{\text{VI}}$:

$$\begin{cases} y_{n+1}y_{n-1} = \frac{a_3a_4(x_n - b_1q^n)(x_n - b_2q^n)}{(x_n - b_3)(x_n - b_4)}, \\ x_{n+1}x_{n-1} = \frac{b_3b_4(y_n - a_1q^n)(y_n - a_2q^n)}{(y_n - a_3)(y_n - a_4)}, \end{cases} \quad (3.31)$$

ただし, $a_i, b_i (i = 1, \dots, 4)$ は条件

$$\frac{a_1a_2}{a_3a_4} = q \frac{b_1b_2}{b_3b_4} \quad (3.32)$$

を満足するパラメータである.

以上のリストは完全なものではない. 例えば

- 既知の離散パルベ方程式を連立させる.
例えば (3.23) は (3.13) を連立させて得られるものである.
- 連続および離散パルベ方程式の Schlesinger 変換 (方程式のあるパラメータに対する解とそのパラメータの別の値の場合に対する解とをつなぐ変換) を差分方程式と見なす.
例えば (3.14) は P_{III} (3.21) の Schlesinger 変換である.

という操作で別の離散パルベ方程式を作ることができる場合がある. そのうち, 形があまり複雑でないものを上のリストに挙げてある. これらの方程式は全て,

- SC に通り
- 連続極限で対応するパルベ方程式に移行する

方程式である.

また, 便宜的に連続極限で移行するパルベ方程式を使って差分方程式を分類したが, この分類や名前が適当なものかどうかは全くわからない. 将来は, 変換群など特徴的な構造をうまく抽出し, それをもって分類, 命名できるようになることが望ましいであろう.

4 離散パルベ方程式の導出

本章では主に文献 [23,24] を元に離散パルベ方程式の導出について簡単に触れてみたい.

4.1 直交多項式と離散パルベ方程式

離散パルベ方程式 (3.2) および (3.13) は直交多項式の理論から導かれる [32]. まず, 区間 $(-\infty, \infty)$ 上で weight function が

$$\rho(t) = e^{-g_1t^2 - g_2t^4} \quad (4.1)$$

で与えられる monic の直交多項式

$$P_n(t) = t^n + c_1t^{n-1} + \dots + c_{n-1}t + c_n \quad (4.2)$$

を考えよう. 直交関係式は

$$\langle P_n(t), P_m(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P_n(t)P_m(t)\rho(t)dt = h_n\delta_{n,m} \quad (4.3)$$

で与えられる．または， $\{P_n(t)\}$ は $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ から上の内積に関する Gram-Schmidt の直交化で与えられる多項式，といってもよい．すると， $P_n(t)$ は次のような表示を持つ．

$$P_n(t) = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-1} \\ 1 & t & \cdots & t^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-2} \end{vmatrix}} \quad (4.4)$$

ただし， b_k は k 次のモーメント，すなわち，

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \rho(t) dt \quad (4.5)$$

である．(4.4) が確かに成立することは，次のようにしてすぐにわかる．両辺に t^k , $k = 0, \dots, n-1$ をかけて積分すれば分子の第 $(n+1)$ 行は第 $(k+1)$ 列と等しくなる．従って $P_n(t)$ は $n-1$ 次以下の多項式と直交する．今，

$$\tau_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (4.6)$$

とおくと，(4.4) に t^n をかけて積分することで正規化定数 h_n が

$$h_n = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}, \quad (4.7)$$

であることもすぐにわかる．

さて，よく知られているように， $P_n(t)$ が monic であることと，直交性ことから $P_n(t)$ は次の 3 項間漸化式

$$tP_n(t) = P_{n+1}(t) + \frac{h_n}{h_{n-1}}P_{n-1}(t), \quad (4.8)$$

を満たす．また，正規化定数 h_n については (4.3) で $m = n$ として部分積分することにより

$$(1 + 2n)h_n = \int_{-\infty}^{\infty} tP_n^2(t)(2g_1t + 4g_2t^3)e^{-g_1t^2 - g_2t^4} dt, \quad (4.9)$$

が成り立つことがわかる．(4.8) と (4.9) から $x_n = \frac{h_n}{h_{n-1}}$ が dP_1

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{n}{4g_2} + \frac{g_1}{2g_2}, \quad (4.10)$$

を満たすことが導かれる． x_n と τ_n の関係は (4.7) から

$$x_n = \frac{h_n}{h_{n-1}} = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}, \quad (4.11)$$

で与えられる．(4.10) は $dP_1(3.2)$ と等価である．

同様に,

$$d\mu = e^{-(z+1/z)} \frac{dz}{2\pi iz}, \quad (4.12)$$

で特徴付けられ, 直交関係が

$$\langle P_n(z), P_m(z) \rangle \equiv \oint_{|z|=1} P_n(z) P_m(1/z) d\mu = h_n \delta_{n,m} \quad (4.13)$$

で定義される「単位円周上の」直交多項式

$$P_n(z) = z^n + c_{n-1,n} z^{n-1} + \cdots + c_{1,n} z + c_{0,n}, \quad (4.14)$$

を考える ($z = e^{i\theta}$) ことにより, $dP_{\text{II}}(3.13)$ が導かれる [33].

4.2 SC を用いた導出

(3.2), (3.13), (3.22), (3.25), (3.29) は Quispel 系と呼ばれる可積分な定数係数の 2 階常差分方程式の系列 [29] を変数係数に拡張し, さらに SC テストに通るべし, という条件を課して得られた. ここでは (3.2) を取り上げてその導出を行う.

Quispel 系とは次の差分方程式である.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{f_1(x_n) - y_n f_2(x_n)}{f_2(x_n) - y_n f_3(x_n)}, \\ y_{n+1} &= \frac{g_1(x_{n+1}) - y_n g_2(x_{n+1})}{g_2(x_{n+1}) - y_n g_3(x_{n+1})}, \end{aligned}$$

ただし, f_i, g_i は 18 個のフリーなパラメータを持つ, ある 4 次式である. 特に, $f_i = g_i$ とし, $x_n \rightarrow x_{2n}$, $y_n \rightarrow x_{2n+1}$ と読み替えると,

$$x_{n+1} = \frac{f_1(x_n) - x_{n-1} f_2(x_n)}{f_2(x_n) - x_{n-1} f_3(x_n)}, \quad (4.15)$$

という差分方程式が得られる. これらの差分方程式は

- 保存量がある
- 楕円函数を用いて積分できる

という意味で可積分である. これから離散パルベ方程式を得るためには, f_i に n 依存性を認め, かつ連続極限でパルベ方程式が得られるように f_i の形を制限し, それに対して SC を適用する. (4.15) を書き換えると

$$f_3(x_n) x_{n+1} x_{n-1} - f_2(x_n) (x_{n+1} + x_{n-1}) + f_1(x_n) = 0,$$

が得られる. そこで, 格子間隔 δ を導入すると ($x_{n+1} \rightarrow x_{n+\delta}$ などと読み替える),

$$\begin{aligned} x_{n+1} + x_{n-1} &= 2x + \delta^2 x'' + O(\delta^4), \\ x_{n+1} x_{n-1} &= x^2 + \delta^2 (x x'' - x'^2) + O(\delta^4), \end{aligned}$$

となるから, (4.2) は

$$x'' = \frac{f_3(x)}{x f_3(x) - f_2(x)} x'^2 + g(x),$$

という形になるであろう. これから, ある特定のパルベ方程式に帰着する差分方程式を見いださそうと思うと, 少なくとも x'' の係数が考えるパルベ方程式と一致するように f_i を選ぶことになるであろう. さて, $P_{\text{I}}(3.1)$ に帰

着するような方程式を探すには，明らかに $f_3 = 0$ でなければならない．さらにこのような考察を続けて， P_I の場合は

$$x_{n+1} + x_{n-1} = -x_n + B(n) + \frac{C(n)}{x_n},$$

という形を調べてみるとよからう，ということになる．そこで，SC を適用すると，

$$B(n+1) - B(n) = 0, \quad C(n+3) - C(n+2) - C(n+1) + C(n) = 0,$$

という条件が得られる．従って，

$$B(n) = b, \quad C(n) = \alpha n + \beta + \gamma(-1)^n,$$

であれば SC テストに通る． $\gamma = 0$ の場合が $dP_I(3.2)$ である．

4.3 その他の導出

4.3.1 Discrete AKNS Hierarchy からの導出

次の離散固有値問題

$$\Psi_{n+1} = U_{n+1}(\zeta)\Psi_n, \quad (4.16)$$

および，時間発展

$$\Psi_{n,t} = B_n(\zeta)\Psi_n, \quad (4.17)$$

を考える．ここで， U_n, B_n は与えられた行列， ζ は spectral parameter と呼ばれる量である． U_n, B_n に対して ζ に関する適当な展開を仮定すると，両立条件からさまざまな微分差分方程式が得られる．これらの方程式の系列を Discrete AKNS Hierarchy と呼ぶ．さて，(4.17) の代わりに，

$$\Psi_{n,\zeta} = A_n(\zeta)\Psi_n, \quad (4.18)$$

という形の発展方程式との両立条件

$$U_{n,\zeta} = A_{n+1}U_n - U_nA_n,$$

を考え， U と A に適当な形を仮定することによってある種の離散パルベ方程式が得られる．例えば (3.4) はこのようにして得られる．ここで， U_n, A_n は Lax pair であることを注意しておく．

4.3.2 パルベ方程式の Bäcklund および Schlesinger 変換からの導出

パルベ方程式のあるパラメータの解を別のパラメータの解に移す変換を Bäcklund 変換，その中で特にモノドロミー指数と呼ばれるパラメータのうち一個のみを動かした時の解の間の変換を Schlesinger 変換と呼ぶ．これらの変換式はパラメータを独立変数と解釈すれば差分方程式と解釈でき，それらを離散パルベ方程式とみなすことができる場合がある．例えば， $P_{II}(3.12)$ の Bäcklund 変換は

$$y(-\alpha) = -y(\alpha), \quad y(\alpha+1) = -y(\alpha) - \frac{1+2\alpha}{2y(\alpha)^2 + 2\frac{dy(\alpha)}{dx} + x},$$

で与えられる．これらから $\frac{dy}{dx}$ を消去することによって，

$$\frac{\alpha+1/2}{y(\alpha+1)+y(\alpha)} + \frac{\alpha-1/2}{y(\alpha)+y(\alpha-1)} = -(2y(\alpha)^2 + x),$$

という α に関する差分方程式が得られる．これは dP_I の一種と見なすことができる．このクラスの差分方程式は Jimbo らによって議論されている [30] ．

4.3.3 他の離散パルベ方程式からの退化

ある種の離散パルベ方程式は他の離散パルベ方程式からの退化（パラメータを特別に取ったり極限操作を加えるなどの操作）によって得られる．例えば， dP_{III} （(3.22) と本質的に等価であるが，parametrization を変えている）

$$x_{n+1}x_{n-1} = -\frac{\gamma x_n^2 + \zeta_0 q^n x_n + \mu_0 q^{2n}}{\alpha x_n^2 + \beta x_n + \gamma},$$

において， $\gamma = 0$ と取ると，

$$x_{n+1}x_{n-1} = -\frac{\zeta_0 q^n x_n + \mu_0 q^{2n}}{(\alpha x_n + \beta)x_n},$$

が得られる．これは (3.15) と等価である．

5 離散パルベ方程式の性質：特殊解

5.1 パルベ方程式の特殊函数解

パルベ方程式の解が一般に「超越的」であることは最近 Umemura らによって最終的に証明されつつあるようである [21]．元来パルベ方程式は新しい特殊函数を探す，という目的で構成された方程式であり，従って，超越性がきちんと示されることはパルベの最初の研究以来の大問題が解決したことになる．しかしながら，パルベ方程式にはパラメータがある特別な値の場合にきれいな構造を持った特殊解（特殊函数解，有理解）が存在する．それはまさにパルベ超越函数（パルベ方程式の解）が非線形世界の特殊函数たる所以をはっきりと見せている．例えば， P_{II}

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2y^3 + xy + \alpha, \quad (5.1)$$

の特殊解を探ってみよう．まず， P_{II} の解で Riccati 方程式

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

の解で書けるものを探してみる．これを (5.1) に代入してみると， y が

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{x}{2}, \quad (5.2)$$

を満足するとき，(5.1) の $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合の解になっていることがわかる．(5.2) はよく知られた変換

$$y = -\frac{d}{dx} \log u,$$

で線形化でき，その結果，

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{x}{2}u,$$

を得る．これは Airy 方程式に他ならない．つまり，Airy 函数の \log 微分が P_{II} の特殊解を与えるわけである．この関係は非線形可積分系の最たるものであるソリトン方程式の場合と酷似している．ソリトン方程式では，おおざっぱに述べると，指数函数の（和の） \log 微分がソリトン解になっているからである．ソリトン方程式ではその指数函数を Wronskian などに乗せて \log 微分することで N -ソリトン解が得られる．さらに，1.2 節でも述べたように， P_{II} は modified Koteweg-de Vries 方程式という典型的なソリトン方程式の similarity reduction として得られることから， P_{II} においても行列式の構造を持った「高次の」特殊解があるのではないかという予想が成り立つ．そして，その予想は正しい．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 (Okamoto[14])

Ai を Airy 函数, すなわち, Airy 方程式

$$\frac{d^2 Ai}{dx^2} = x Ai$$

を満足する函数とし, τ_N を次の $N \times N$ 行列式

$$\tau_N = \begin{vmatrix} Ai & \frac{d}{dx} Ai & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{N-1} Ai \\ \frac{d}{dx} Ai & \left(\frac{d}{dx}\right)^2 Ai & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{N-1} Ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^{N-1} Ai & \left(\frac{d}{dx}\right)^N Ai & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{2N-2} Ai \end{vmatrix}, \quad (5.3)$$

とする. このとき,

$$y = \frac{d}{dx} \log \frac{\tau_{N+1}}{\tau_N}$$

は P_{II}

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2y^3 - xy - \alpha$$

の $\alpha = -(2N+1)$ の場合を満足する. ■

この結果はバブルベ方程式が Hamilton 系として表されることを出発点として導かれたが, τ_N の満足する Hirota の双線形方程式から直接導くこともできる [13]. 実際, τ_N は次の方程式を満足することを証明することができ, これから変数変換 (5.1) により P_{II} を導くことができる:

$$(D_x^2 - x)\tau_{N+1} \cdot \tau_N = 0, \quad (5.4)$$

$$(D_x^2 - 4xD_x - (2N+1))\tau_{N+1} \cdot \tau_N = 0, \quad (5.5)$$

ただし, D_x は Hirota の双線形微分演算子 [22],

$$D_x^n f \cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n f(x)g(x') \Big|_{x=x'}$$

である. 方程式 (5.4), (5.5) は両者とも Plücker 関係式 (行列式の恒等式) に帰着させることができる. 同様に, P_{III} , P_{IV} の特殊函数解 (の一部) を挙げておく.

P_{III} : [17]

$$y = \left(\log \frac{\tau_N^{\nu+1}}{\tau_{N+1}^\nu} \right)_x + \frac{\nu + N}{x}. \quad (5.6)$$

$$\tau_N^\nu = \begin{vmatrix} J_\nu & D J_\nu & \cdots & D^{N-1} J_\nu \\ D J_\nu & D^2 J_\nu & \cdots & D^N J_\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{N-1} J_\nu & D^N J_\nu & \cdots & D^{2N-2} J_\nu \end{vmatrix}, \quad D = x \frac{d}{dx}, \quad (5.7)$$

は P_{III} (3.21) の

$$\alpha = 2(N - \nu), \quad \beta = 2(\nu + N + 1), \quad \gamma = 1, \quad \delta = -1. \quad (5.8)$$

の場合を満足する. ただし, J_ν は ν 次の Bessel 函数である. ■

P_{IV} : [14,18,19]

H_n を n 次の Hermite-Weber 函数, すなわち, 漸化式

$$\frac{d}{dz}H_n - zH_n = -H_{n+1}, \quad \frac{d}{dz}H_n = nH_{n-1}. \quad (5.9)$$

を満たす函数とする. このとき,

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} H_n & H_{n+1} & \cdots & H_{n+N-1} \\ H_{n+1} & H_{n+2} & \cdots & H_{n+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n+N-1} & H_{n+N} & \cdots & H_{n+2N-2} \end{vmatrix}, \quad (5.10)$$

$$y = -\sqrt{2} \left(\log \frac{\tau_{N+1}^n}{\tau_N^n} \right)_z, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}x, \quad (5.11)$$

は $P_{IV}(3.24)$ の $(\alpha, \beta) = (-(n+2N+1), -2n^2)$ を満足する. ■

ソリトン理論に対する一種の統一理論である佐藤理論では, ソリトン解や有理解などの厳密解が行列式 (の比) の \log 微分で書かれるということは可積分系の本質的な一側面であるとされている. パンルベ方程式の解は先に述べたように超越的ではあるが, このように我々が目にできる厳密解にやはり同様の行列式構造があることは, パンルベ方程式の本質の重要な一側面を示唆しているのではないだろうか.

5.2 離散パンルベ方程式の特殊函数解

さて, 離散パンルベ方程式の特殊函数解について議論しよう. ここで興味があるのは,

- 果たして「離散特殊函数」としてどんな函数が現れるか.
- 行列式で表示できる「高次の」解を持つか.

という点である. その理由は,

- まず, 得られた離散パンルベ方程式がパンルベ方程式の離散版として妥当なものであるかは疑問がある. というのは, SC は可積分性とどのように関係するのかが理論的に全くわかっておらず, 従って, それを拡大解釈して得られた方程式が妥当なものかどうかとも全くわからない. Lax pair など一応分かってはいるが, やはりまだ形式論の域を出ていない. 例えば, Lax pair などから出発して何か解析がなされたという例はほとんどない.
- そういう状況の中で, 形式論から一步踏み出すには厳密解を調べるのが妥当であろう. というのは, 前節の最後で述べたように, 解の行列式構造がパンルベ方程式の本質の一側面を示唆しているように考えられるからである.
- パンルベ方程式で得られた結果のほとんどで本質的に用いられている一般論や手法が離散系ではそのままでは使えない. ところが厳密解の構成にはソリトン理論と同様に Hirota の直接法をベースにした「算術的」な, 従って一般論をほとんど使わずに済む手法が使える. 従って, 徒手空拳の状態からでも形式論から一步出た結果が得られる.

ということである.

さて, それではまず “standard” dP_{II}

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{(\alpha n + \beta)x_n + \gamma}{1 - x_n^2}, \quad (5.12)$$

を例として取り上げて特殊函数解を構成しよう． P_{II} (3.12) と同様に離散 Riccati 方程式

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{c_n x_n + d_n},$$

から出発しよう．これを (5.12) に代入することによって，もし x_n が

$$x_{n+1} = \frac{x_n - (pn + q)}{1 + x_n}, \quad (5.13)$$

を満足すれば， x_n は (5.12) の

$$\alpha = 2p, \quad \beta = -p + 2q + 2, \quad \gamma = p, \quad (5.14)$$

の解になることがわかる．(5.13) において，

$$x_n = \frac{f_n}{g_n},$$

と置き，両辺の分母同士，分子同士を等値すれば線形化でき，その結果，

$$x_n = \frac{g_{n+1}}{g_n} - 1, \quad (5.15)$$

$$g_{n+2} - 2g_{n+1} + g_n = -(pn + q)g_n, \quad (5.16)$$

が dP_{II} の特殊解を与えることになる．(5.16) はまさに離散 Airy 方程式と呼ぶにふさわしいものであり，(5.15) も離散版の \log 微分というべきものになっている．従って，ここまでは連続系と離散系が全くパラレルに対応していることがわかるであろう．

さて，それでは「高次」の解が dP_{II} (5.12) にはあるだろうか？それを探すには当然 P_{II} の場合が参考になる．そこで， τ 函数として Wronskian (5.3) の代りに「差分 Wronskian」である Casorati 行列式

$$\tau_N(n) = \begin{vmatrix} g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{n+N-1} \\ g_{n+1} & g_{n+2} & \cdots & g_{n+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n+N-1} & g_{n+N} & \cdots & g_{n+2N-2} \end{vmatrix},$$

を予想するのが自然である．また，変数変換としては N (行列式のサイズ) が 0 の場合に (5.15) になるようなもの (ただしサイズ 0 の行列式は 1 とする)，例えば

$$x_n = \frac{\tau_{N+1}(n+1)\tau_N(n)}{\tau_{N+1}(n)\tau_N(n+1)} - 1$$

程度を仮定する．頼れる一般論はないので，後はこの予想を数式処理を使って力づくで確かめ，然る後に証明する，という手順で進む．その結果，実はこの予想は間違っていることがわかる³．正しい結果は以下の通りである．

定理 [43]

A_n は線形差分方程式

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} = -(pn + q)A_n, \quad (5.17)$$

を満足する函数とし， $\tau_N(n)$ を $N \times N$ 行列式

$$\tau_N(n) = \begin{vmatrix} A_n & A_{n+2} & \cdots & A_{n+2N-2} \\ A_{n+1} & A_{n+3} & \cdots & A_{n+2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n+N-1} & A_{n+N+1} & \cdots & A_{n+3N-3} \end{vmatrix}, \quad (5.18)$$

³ 以下の結果は上の予想が間違っているにもかかわらず，数式処理のプログラムを作り始めて 5 分程度で一発で得られた．この結果が出たのは，実は数式処理のプログラムのバグのためだったのである．「正しい」プログラムを作ってみたら，当然解になっていないので大変慌てた記憶がある．もし正しいプログラムを書いていたら，下の結果はそう簡単には得られなかっただろう．何が幸いするかわかったものではない．

とする．このとき，

$$x_n = \frac{\tau_{N+1}(n+1)\tau_N(n)}{\tau_{N+1}(n)\tau_N(n+1)} - 1, \quad (5.19)$$

は dP_{II} (5.12) の

$$\alpha = 2p, \quad \beta = (2N-1)p + 2q, \quad \gamma = -(2N+1)p, \quad (5.20)$$

の場合を満足する．

コメント：

1. A_n は本質的に g_n と同じものである．
2. 連続極限は

$$p = -\varepsilon^3, \quad q = 1, \quad n = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (5.21)$$

とおき， $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることによって得られる．当然，解，方程式，両者とも連続系の結果と一致する．

3. τ 函数の要素の並び方が水平方向と垂直方向で非対称になっていることに注意されたい．後で示すが，どうやらこのような非対称性は離散パルベ方程式に共通して見られる構造のようである．

この結果から， dP_{II} (5.12) も P_{II} と同様の，行列式構造を持った高次の解を持っていることになる．よい構造をもった解が存在するという事は，連続系と同様の数理論が期待できるわけであり，さらなる研究の価値があるはずである．

証明の概略

4.1 節で述べた P_{II} の特殊函数解は元々 P_{II} が Hamilton 系であることを用い，正準変換の理論を効果的に用いて得られた．しかしながら，離散系においてはそのような大道具は一切ないので，より低レベルの手法を使わなければならない． P_{II} の場合は τ 函数 (5.3) が双線形方程式 (5.4), (5.5) を満たすことを直接示すことができる [13]．それによると，双線形方程式は行列式の 2 次の恒等式である Plücker 関係式に帰着される．Plücker 関係式は行列式の端列がシフトしたような行列式の間関係式であるので，

- 行列式の要素の満たす漸化式（この場合は Airy 方程式）を使って，適当に列がシフトした行列式を τ 函数の微分で表現する公式（微分公式）を作る．
- 微分公式を用いて，双線形方程式を Plücker 関係式に帰着させる．

という手続きで証明ができる．これは行列式の性質と要素の満たす関係式しか使っていないので，大道具のない離散系に対しても適用可能である．実際， dP_{II} の場合には，要素の満たす漸化式 (5.17) を用いて「差分公式」

$$2^{1-N}\tau_N(n) = \begin{vmatrix} B_n^{(0)} & A_{n+1} & A_{n+3} & \cdots & A_{n+2N-3} \\ B_n^{(1)} & A_{n+2} & A_{n+4} & \cdots & A_{n+2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n^{(N-1)} & A_{n+N} & A_{n+N+1} & \cdots & A_{n+3N-4} \end{vmatrix}, \quad (5.22)$$

$$2^{1-N}(pn+q)\tau_N(n) = \begin{vmatrix} A_{n+1} & B_{n+2}^{(0)} & A_{n+3} & \cdots & A_{n+2N-3} \\ A_{n+2} & B_{n+2}^{(1)} & A_{n+4} & \cdots & A_{n+2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n+N} & B_{n+2}^{(N-1)} & A_{n+N+1} & \cdots & A_{n+3N-4} \end{vmatrix}, \quad (5.23)$$

などを示すことができる．ただし， $B_n^{(k)}$ は A_n を用いて再帰的に

$$B_n^{(0)} = A_n, \quad B_n^{(k)} = A_{n+k} + \frac{kp}{2}B_n^{(k-1)}, \quad (5.24)$$

と定義される．これから，恒等的に 0 である行列式

$$0 = \begin{vmatrix} -1 & 0' & 1 & \cdots & 2N-5 & \emptyset & 2N-3 & \phi \\ \hline -1 & 0' & \emptyset & 1 & \cdots & 2N-5 & 2N-3 & \phi \end{vmatrix}, \quad (5.25)$$

のラプラス展開から得られる Plücker 関係式

$$\begin{aligned} 0 &= |-1, 0', 1, \dots, 2N-5| \times |1, \dots, 2N-5, 2N-3, \phi| \\ &\quad - |-1, 1, \dots, 2N-5, 2N-3| \times |0', 1, \dots, 2N-5, \phi| \\ &\quad + |-1, 1, \dots, 2N-5, \phi| \times |0', 1, \dots, 2N-5, 2N-3| \end{aligned}$$

を上の変分公式を使って書き直すと，双線形差分方程式

$$0 = (pn + q) \tau_N(n) \tau_{N-1}(n+3) - 2 \tau_N(n+1) \tau_{N-1}(n+2) + \tau_N(n+2) \tau_{N-1}(n+1), \quad (5.26)$$

が得られる．ただし，上の行列式の表示で “ j ”, “ j' ”, “ ϕ ” はそれぞれ列ベクトル

$$j = \begin{pmatrix} A_{n+j} \\ A_{n+j+1} \\ \vdots \\ A_{n+j+N-1} \end{pmatrix}, \quad j' = \begin{pmatrix} B_{n+j}^{(0)} \\ B_{n+j}^{(1)} \\ \vdots \\ B_{n+j}^{(N-1)} \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

である．

同様にして，

$$\tau_{N+1}(n+2)\tau_N(n+1) - 2\tau_{N+1}(n+1)\tau_N(n+2) = -(pn + q)\tau_{N+1}(n)\tau_N(n+3), \quad (5.28)$$

$$(pn + q)\tau_N(n+3)\tau_N(n) - (p(n+2N) + q)\tau_N(n+2)\tau_N(n+1) = \tau_{N+1}(n+1)\tau_{N-1}(n+2), \quad (5.29)$$

という双線形方程式が得られ，これから変数変換 (5.19) によって dP_{II} が導かれる． ■

以下，現在までに分かっている離散パルベ方程式の特殊函数型の特殊解をリストする．

“alternate” dP_{II} [47]

$$\begin{aligned} \frac{an + b}{x_{n+1}x_n + 1} + \frac{a(n-1) + b}{x_nx_{n-1} + 1} &= -x_n + \frac{1}{x_n} + (an + b) + c, \\ x_n &= \frac{\tau_{N+1}(n-1)\tau_N(n+1)}{\tau_{N+1}(n)\tau_N(n)}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\tau_N(n) = \begin{vmatrix} G_n & G_{n+2} & \cdots & G_{n+2N-2} \\ G_{n+1} & G_{n+3} & \cdots & G_{n+2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n+N-1} & G_{n+N+1} & \cdots & G_{n+3N-3} \end{vmatrix}, \quad (5.31)$$

$$G_{n+1} + G_{n-1} = (pn + q)G_n, \quad (5.32)$$

$$a = p, \quad b = pN + q, \quad c = pN. \quad (5.33)$$

コメント：

1. この場合 τ 関数は対称行列式である．

2. この方程式は P_{III} の Bäcklund 変換そのものである．従って， P_{III} の解そのものがこの方程式の解になっている．実際， G_n の満たす漸化式は Bessel 関数の漸化式そのものであり， x_n は P_{III} の特殊函数型の解でもある．

“multiplicative” dP_{II} [48]

$$x_{n+1}x_{n-1} = \alpha \frac{x_n + q^n}{x_n(x_n q^n + 1)}, \quad (5.34)$$

$$x_n = -q^{-2N-n} \frac{\tau_{N+1}(n)\tau_N(n-1)}{\tau_{N+1}(n-1)\tau_N(n)}, \quad (5.35)$$

$$\tau_N(n) = \begin{vmatrix} f_n & f_{n+2} & \cdots & f_{n+2N-2} \\ f_{n-1} & f_{n+1} & \cdots & f_{n+2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-N+1} & f_{n-N+2} & \cdots & f_{n+N-1} \end{vmatrix}, \quad (5.36)$$

$$f_{n+1} - f_n = -q^{2n} f_{n-1}. \quad (5.37)$$

$$\alpha = q^{-2(2N+1)}. \quad (5.38)$$

コメント：

1. この場合 τ 関数の要素の添字は横方向は 2 増え，縦方向には 1 減っている．しかし，要素を並べ替えることによって，standard dP_{II} と同様の構造にすることができる．
2. この方程式は「超離散化」することが可能であり，超離散化された方程式にはやはり広いクラスの特解が存在する．しかし，この解は超離散極限では生き残らないようである．

$d(q)P_{III}$ [49]

$$x_{n+1}x_{n-1} = \frac{ab(x_n - cq^{2n})(x_n - dq^{2n})}{(x_n - a)(x_n - b)}, \quad (5.39)$$

$$x_n = \frac{\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n)}{\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+1)} - q^{\nu+N}, \quad (5.40)$$

$$\tau_N^\nu(n) = \begin{vmatrix} J_\nu(n) & J_\nu(n+1) & \cdots & J_\nu(n+N-1) \\ J_\nu(n+2) & J_\nu(n+3) & \cdots & J_\nu(n+N+1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ J_\nu(n+2N-2) & J_\nu(n+2N-1) & \cdots & J_\nu(n+3N-3) \end{vmatrix}, \quad (5.41)$$

$$J_\nu(n) - q^{-\nu} J_\nu(n+1) = -(1-q)q^n J_{\nu+1}(n), \quad (5.42)$$

$$J_\nu(n) - q^\nu J_\nu(n+1) = (1-q)q^n J_{\nu-1}(n). \quad (5.43)$$

$$a = q^{\nu+N}, \quad b = q^{-\nu+N}, \quad c = (1-q)^2 q^{\nu+5N}, \quad d = -(1-q)^2 q^{-\nu+3N-2}. \quad (5.44)$$

コメント：

1. τ 関数の行列式構造はやはり非対称である．
2. $J_\nu(n)$ は $q^n \rightarrow x$ と読み替えれば Jackson の q -Bessel 函数である．

5.3 有理解

パルベ方程式が持つもう一つのクラスの特解として有理解, もしくは代数解があり, 特殊函数解と同様に行列式表示を調べることによってその「正体」が明らかになる. 例えば $P_{II}(3.12)$ の有理解は次のように表される.

定理 [46]

$q_k(z, t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, を

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) \lambda^k = \exp\left(x\lambda + \frac{1}{3}\lambda^3\right), \quad (5.45)$$

で定義される多項式とし, τ_N を

$$\tau_N = \begin{vmatrix} q_N & q_{N+1} & \cdots & q_{2N-1} \\ q_{N-2} & q_{N-1} & \cdots & q_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{-N+2} & q_{-N+3} & \cdots & q_1 \end{vmatrix}, \quad q_k = 0 \text{ for } k < 0. \quad (5.46)$$

とする. このとき,

$$v = \frac{d}{dx} \log \frac{\tau_{N+1}}{\tau_N}, \quad (5.47)$$

は P_{II}

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2y^3 - 4xy + 4(N+1), \quad (5.48)$$

を満足する. ■

コメント:

- (5.46) は Yablonski-Vorob'ev 多項式と呼ばれるが, この結果はそれが KdV 方程式や modified KdV 方程式の有理解を与える 2-reduced Schur 函数の特別な場合であることを主張している. 実際, 2-reduced Schur 函数は $p_k(x_1, x_2, \dots)$ を

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x_1, x_2, \dots) \lambda^k = \exp \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda^n$$

で定義される多項式として,

$$\tau_N = \begin{vmatrix} p_N & p_{N+1} & \cdots & p_{2N-1} \\ p_{N-2} & p_{N-1} & \cdots & p_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-N+2} & p_{-N+3} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}, \quad p_k = 0 \text{ for } k < 0,$$

で与えられる.

- P_{IV} の有理解に関しても同様の結果が得られている. それによると, P_{IV} の持つ 3 つの系列の有理解のうち, 2 つの系列に属するものは Hermite-Weber 函数で表される特殊函数解のうち, 特別な場合として Hermite 多項式で表されるものに当たるものであり, 残りの 1 つの系列に属するものは P_{II} と同様に 3-reduced Schur 函数で表される [18,19].

さて, 離散パルベ方程式に関しても, 特殊函数型の解に関する結果から, 有理解に関しても上のような美しい表示が存在するものと予想される. しかし, 有理解は構成に当たって特殊函数解より技術的に困難な点があり, 現在までにきちんとした形の有理解がわかっているのは standard $dP_{II}(5.12)$ だけである. その結果は次のようになっている.

定理 [45]

$L_k^{(n)}(x)$ を次式で定義される Laguerre 多項式

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(n)}(x)\lambda^k = (1-\lambda)^{-1-n} \exp \frac{-x\lambda}{1-\lambda}, \quad L_k^{(n)}(x) = 0 \quad (k < 0), \quad (5.49)$$

とし, $\tau_N(n)$ を

$$\tau_N(n) = \begin{vmatrix} L_N^{(n)} & L_{N+1}^{(n)} & \cdots & L_{2N-1}^{(n)} \\ L_{N-2}^{(n)} & L_{N-1}^{(n)} & \cdots & L_{2N-3}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{-N+2}^{(n)} & L_{-N+3}^{(n)} & \cdots & L_1^{(n)} \end{vmatrix}, \quad (5.50)$$

とする. このとき,

$$X(n) = \frac{\tau_{N+1}(n+1)\tau_N(n+1)}{\tau_{N+1}(n)\tau_N(n)} - 1, \quad (5.51)$$

は “standard” dP_{II},

$$X(n+1) + X(n-1) = \frac{2(n+1)X(n) - (N+1)}{x(1-X(n))^2}, \quad (5.52)$$

を満足する. ■

注意: 連続極限は n を $n+x-1$ で置き換え,

$$x = -\frac{1}{2\varepsilon^3}, \quad n = \frac{z}{\varepsilon}, \quad x_n = \varepsilon v, \quad (5.53)$$

として $\varepsilon \rightarrow 0$ とすればよい. しかし, 方程式や τ 函数そのものはうまく連続系の場合に帰着するが, 行列式の要素はそのままでうまくいかない. これは, 要素として $L_k^{(n)}$ ではなく,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{L}_k^{(n)}(x)\lambda^k = (1-\lambda^2)^{-\frac{1}{2}x} (1-\lambda)^{-n-x} \exp \frac{-x\lambda}{1-\lambda}, \quad \hat{L}_k^{(n)}(x) = 0 \quad (k < 0), \quad (5.54)$$

を取ることによってうまくいく. $\hat{L}_k^{(n)}$ は $L_k^{(n+x-1)}$, $L_{k-2}^{(n+x-1)}$, \dots らの線形結合であり, これを並べて作った τ 函数は $\tau_N(n+x-1)$ に等しい.

5.4 分子解

離散系特有の解に「分子解」と呼ばれる, やはり行列式構造を持った解がある. これはもともと戸田格子方程式

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = \exp(q_{n-1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n+1}), \quad (5.55)$$

に対して境界条件

$$q_0 = -\infty, \quad (5.56)$$

を課したもの (または, さらに $q_M = \infty$ を課すこともある) を戸田分子方程式と呼んだことに由来する. 戸田分子方程式の解は

$$q_n = \log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \quad (5.57)$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f & \left(\frac{d}{dx}\right)f & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}f \\ \left(\frac{d}{dx}\right)f & \left(\frac{d}{dx}\right)^2f & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^n f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}f & \left(\frac{d}{dx}\right)^n f & \cdots & \left(\frac{d}{dx}\right)^{2n-2}f \end{vmatrix}, \quad (5.58)$$

で与えられる．ただし， f は t の任意函数である．ここで注意しておきたいのは，通常のソリトン解では行列式の大きさはソリトンの数に対応するのに対し，分子解では行列式の大きさは格子番号に相当する．従って，行列式の構造は連続極限で「潰れて」しまう．一般にある境界条件付きの離散系において，格子番号が行列式の大きさに相当するような解を「分子解」と呼ぶ．

いくつかの離散バブルベ方程式に対しても分子解があることがわかっている．以下にそれらをリストする．

“Standard” dP_I: [51]

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{qn}{x_n} + p, \quad N \geq 1, \quad x_0 = 0, \quad (5.59)$$

$$\begin{cases} x_{2n} &= \frac{\tau_{n+1}^0 \tau_{n-1}^1}{\tau_n^0 \tau_n^1} \\ x_{2n+1} &= \frac{\tau_n^0 \tau_{n+1}^1}{\tau_{n+1}^0 \tau_n^1} \end{cases}, \quad (5.60)$$

$$\tau_n^\nu = \begin{vmatrix} a_\nu & a_{\nu+1} & \cdots & a_{\nu+N-1} \\ a_{\nu+1} & a_{\nu+2} & \cdots & a_{\nu+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu+N-1} & a_{\nu+N} & \cdots & a_{\nu+2N-2} \end{vmatrix}, \quad (5.61)$$

$$a_{\nu+2} = p a_{\nu+1} + (2\nu + 1)q a_\nu. \quad (5.62)$$

コメント：

1. a_ν は standard dP_{II} の特殊函数解において現れた τ 函数の要素と本質的に同じものである．また， a_ν は Hermite-Weber 函数 $H_\nu(x)$ を用いて

$$a_\nu = (-q/2)^{(\nu-1/2)/2} H_{\nu-1/2} \left(\frac{p}{(-q/2)^{1/2}} \right), \quad (5.63)$$

と表せる．これは $H_\nu(x)$ の漸化式

$$H_{\nu+1}(x) - xH_\nu(x) + \nu H_{\nu-1}(x) = 0, \quad (5.64)$$

と (5.62) を比較することによってすぐにわかる．

2. また， τ_n^ν は P_{IV} の特殊函数解を与える τ 函数と同じものである．P_{IV} の場合， n は方程式のパラメータである．従って，standard dP_I は P_{IV} の Bäcklund 変換と深く関連していることになる．

“Standard” dP_{II}: [47]

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{pnx_n}{1 - x_n^2}, \quad (5.65)$$

$$x_n = \frac{\tau_n^1}{\tau_n^0}, \quad (5.66)$$

$$\tau_n^\nu = \begin{vmatrix} a_\nu & a_{\nu+1} & \cdots & a_{\nu+N-1} \\ a_{\nu-1} & a_\nu & \cdots & a_{\nu+N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu-N+1} & a_{\nu-N} & \cdots & a_\nu \end{vmatrix}, \quad (5.67)$$

$$a_{\nu+1} - a_{\nu-1} = p\nu a_\nu. \quad (5.68)$$

コメント：

1. (5.68) と Bessel 関数の漸化式

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x), \quad (5.69)$$

を比べてみればすぐにわかるように, $p = \frac{2}{x}$ ととれば, a_{ν} は Bessel 関数そのものである.

2. さらに, τ_n^{ν} は P_{III} の特殊函数解を与える τ 函数とまったく同じである. 実際, P_{III} の特殊函数解と比較することにより, $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ は P_{III} を満足することがわかる.
3. しかしながら, P_{III} と standard dP_{II} の関係がわかったからといって, standard dP_{II} の全てが P_{III} からすぐに説明できるわけではない. 実際, standard dP_{II} の有理解や特殊函数解と P_{III} の解との関係はよくわからない.

“alternate” dP_{II}: [47]

$$X_n = -\frac{\tau_{n+1}^{\nu} \tau_n^{\nu+1}}{\tau_{n+1}^{\nu+1} \tau_n^{\nu}}, \quad (5.70)$$

は dP_{III} の Bäcklund 変換である alternate dP_{II}

$$\frac{p(N+1)}{X_{n+1}X_n+1} + \frac{pN}{X_nX_{n-1}+1} = -X_n + \frac{1}{X_n} + (pn + p\nu + p), \quad (5.71)$$

を満たすことが示される. ここで, τ_n^{ν} は standard dP_{II} の分子解を与える τ 函数 (5.67) である.

5.5 その他の離散パルベ方程式に対する解

以上, 解の行列式構造まで得られているものを列挙してきたが, 特殊函数解や有理解の最低次の場合など, 簡単な解は以下の方程式に関して報告されている (ほとんどの場合は Bäcklund 変換も同時に報告されている).

- dP_{III}(3.22): 代数解 [50]
- dP_{IV}(3.25): 特殊函数解・有理解⁴ [39–41]
- dP_V(3.29): 特殊函数解・代数解 [42]

6 離散パルベ方程式研究の今後の展望

以上の章でこれまでになされてきた研究を主に筆者が行ってきた研究を中心に述べてきた. それからもわかるように, 離散パルベ方程式に関しては, 非常に豊かな数理が背後に存在していることが示唆されているにも関わらず, 通常のパルベ方程式のような体系だった理論がほとんどない.

離散系の研究の難しさ (そして面白さ) は連続系で成功を収めた手法やそれによる結果の素直な適用だけではよい結果が得られないというところにある. 従って現状ではさまざまな雑多な結果, データがバラバラに存在し, それからいかに本質的な数理を抽出していくかがこれからの問題になるであろう.

また, 特殊解の議論に垣間見えたように, パルベ方程式と離散パルベ方程式はどうやら完全に別のものではないらしい. ただ, 離散パルベ方程式が単純にパルベ方程式の Schlesinger 変換である, というようにはなっていないようにも見える. 例えば standard dP_{II} の分子解を与える τ 函数は P_{III} のそれと同じだが特殊函数解を与える τ 函数は P_{IV} と似ているが違う, といったように. この辺りにも離散パルベ方程式の数理を探り当てる鍵があるかも知れない.

最後に離散パルベ方程式をめぐるこれからどのような方向に発展が有り得るか, 私見を述べて報告を終わりにしたい.

⁴ 一部の解については数式処理を用いて行列式表示の形は求められているが, 証明されていない

q -P_{VI} Jimbo and Sakai によって提出された q -P_{VI}(3.31) はその構造の美しさにおいて離散パルベ方程式の中でひととき光を放っている． q -P_{VI} は

- 線形 q -差分方程式のコネクション保存変形から導かれる [53,54]
- 解として q -超幾何関数で表される解 [53,54] およびその Casorati 行列式で表される特殊解がある [58]
- Schlesinger 変換 (パラメータのうち一つをシフトさせたもの間になりたつ関係式) が全て対称的で q -P_{VI} と同じ形をしている．すなわち，独立変数とパラメータが全て平等である [56]
- 退化によって多くの離散パルベ方程式が導かれる [57]

という顕著な性質を持っている．今後の離散パルベ方程式の研究においては q -P_{VI} が重要な役割を果たすであろう．

Lax Pair Lax pair, すなわち離散パルベ方程式の補助線形問題は離散パルベ方程式について本質的な情報を与えるであろう．例えば，補助線形問題における特異性やモノドロミ データを調べることで離散パルベ方程式の間の関係性を調べることができる．

Symplectic 構造 上でも述べたように，パルベ方程式の理論ではパルベ方程式の symplectic 構造が重要な役割を果たす．パルベ方程式の Hamiltonian についてはこの報告では詳しく述べなかった．パルベ方程式からその Hamiltonian に至る道は複数あるのだが，パルベ方程式では基本的 object である τ 関数と Hamiltonian が非常に近い位置にある．従って，離散系においては「離散時間 Hamiltonian」や正準変換の，少なくとも確立された理論はないけれども，逆に，離散パルベ方程式を典型例として研究することによってそのような理論ができる可能性もあることを注意しておきたい．

初期値空間 パルベ方程式の定義空間である初期値空間はパルベ方程式の幾何学的特徴づけや解析に有効である．離散パルベ方程式に対しても「初期値空間」を構成することによって同様の特徴づけが可能であると考えられる．また，その結果は幾何学と離散パルベ方程式をつなぐ橋となるであろう．

超離散パルベ方程式 最近ソリトン理論で，一種の極限操作を用いて，ソリトン解の構造を保ったまま従属変数を離散化し，一種のソリトン・セル・オートマトンを組織的に構築する超離散化 (ultra-discretization) と呼ばれる手法が提案されている．この手法はある種の離散パルベ方程式にも適用され，いくつかの「超離散パルベ方程式」が得られた．また，驚くべきことに，それらに対してあるクラスの厳密解が構成されている．超離散化された方程式は加法と max という操作だけで構成された代数 (max-plus 代数) 上の方程式であり，これらの結果は max-plus 代数上にも「可積分性」という概念が導入されることを示唆している．これに関して筆者は大いに興味を持っているので，少し詳しく紹介したい．

例として “multiplicative dP_{II}” 方程式

$$x_{n+1}x_{n-1} = \alpha \frac{x_n + q^n}{x_n(x_n q^n + 1)}, \quad (6.1)$$

を考えよう． $q \geq 0, \alpha \geq 0, x_n \geq 0$ を仮定し，

$$q = e^{\frac{1}{c}}, \quad x_n = e^{\frac{X_n}{c}}, \quad \alpha = e^{\frac{a}{c}}, \quad (6.2)$$

とおくと

$$e^{\frac{X_{n+1}}{c}} e^{\frac{X_{n-1}}{c}} = e^{\frac{a}{c}} \frac{e^{\frac{X_n}{c}} + e^{\frac{n}{c}}}{e^{\frac{X_n}{c}} (e^{\frac{X_n+n}{c}} + 1)},$$

となる．超離散化において鍵となるのは公式

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log(e^{\frac{A}{c}} + e^{\frac{B}{c}} + \dots) = \max(A, B, \dots), \quad (6.3)$$

である．両辺の対数を取り， $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を取り，(6.3) を使うと

$$X_{n+1} = a + n - X_{n-1} - X_n + \max(X_n - n, 0) - \max(X_n + n, 0), \quad (6.4)$$

が得られる [59]．この方程式は n が整数点を取り，初期値が整数であれば，任意の n に対して X_n が整数値となる．このような意味で，従属変数も離散化されたことになる．

もちろん，(6.4) に何かよい性質がなければ全く意味がないのだが，驚くべきことに，(6.4) には特殊解の系列

$$X_n^N = -2N + \sum_{k=1}^N [\max\{n + 1 + 2(N - 1) - 3(k - 1), 0\} - \max\{n + 2(N - 1) - 3(k - 1), 0\}], \quad (6.5)$$

が見つかっているのである [60]．やはりこの背後には何かがある．果たして，そこにはどんな新しい数学が眠っているのだろうか．

参考文献

- [1] M.J. Ablowitz and J. Ladik, J. Math. Phys., **16**(1975) 598.
- [2] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn., **43**(1977) 1424, 2074, 2079, *ibid.*, **45**(1978) 321, *ibid.*, **46**(1979) 312,
- [3] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn., **50**(1981) 3785.
- [4] T. Miwa, Proc. Jpn. Acad. **58A**(1982) 9.
- [5] K. Kajiwara and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn., **60**(1991) 3986.
- [6] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn., **66**(1997) 283.
- [7] D. Takahashi and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn., **59**(1990) 3514; 高橋 大輔, 薩摩 順吉, 日本応用数理学会論文誌, **1**(1991), 41.
- [8] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. **76**(1996) 3247.
- [9] M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur, Lett. Nuov. Cim., **23**(1978), 333.
- [10] , M.J. Ablowitz and H. Segur (薩摩 順吉, 及川 正行 訳), 「ソリトンと逆散乱変換」(日本評論社, 1993).
- [11] J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale, J. Math. Phys. **24**(1983) 522.
- [12] M. J. Ablowitz and P.A. Clarkson, “*Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*”, London Mathematical Society Lecture Note Series **149**(Cambridge University Press, 1991).
- [13] A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn., **61**(1992), 3007.
- [14] K. Okamoto, Ann. Mat., (1986) 337.
- [15] K. Okamoto, Japan J. Math., **13**(1987) 47.
- [16] K. Okamoto, Math. Ann., **275**(1986) 221.
- [17] K. Okamoto, Funkcialaj Ekvacioj, **30**(1987) 305.

- [18] K. Kajiwara and Y. Ohta, J. Phys. A, (1998) 2431.
- [19] M. Noumi and Y. Yamada, “Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials”, preprint, q-alg/9708018.
- [20] 例えば 大貫 義郎, 吉田 春男 著, 「力学」(岩波講座現代の物理学 1, 岩波書店, 1994) を参照 .
- [21] 例えば 梅村 浩, 数学 48(1996) 341 を参照 .
- [22] 広田 良吾 著, 「直接法によるソリトンの数理」(岩波書店, 1992)
- [23] B. Grammaticos and A. Ramani, in *Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations*, ed. P. A. Clarkson (NATO ASI Ser. C413, Kluwer, 1993) 299.
- [24] A. S. Fokas, B. Grammaticos and A. Ramani, J. Math. Anal. Appl. **180** (1993) 342.
- [25] B. Grammaticos, A. Ramani and V. Papageorgiou, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1825.
- [26] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Satsuma: J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 4655.
- [27] K. Maruno, K. Kajiwara, S. Nakao and M. Oikawa, Phys. Lett. A **229**(1997) 173; K.Maruno, K. Kajiwara and M. Oikawa, “*Casorati Determinant Solutions for the Discrete Relativistic Toda Lattice Equation*”, to appear in Phys. Lett. A(1998).
- [28] J. Hietarinta and C. Viallet, “Singularity confinement and chaos in discrete systems”, preprint, solv-int/9711014.
- [29] G.R.W Quispel, J.A.G. Roberts and C.J.Thompson, Physica **D34**(1989) 183.
- [30] M.Jimbo and T.Miwa, Physica **2D** (1981) 407.
- [31] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829.
- [32] E. Brézin and V. A. Kazakov, Phys. Lett. B **236** (1990) 144.
- [33] V. Periwal and D. Shevitz, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1326.
- [34] A. R. Its, A. V. Kitaev and A. S. Fokas, Russ. Math. Surveys **45**, No. 6 (1990) 155.
- [35] J. Satsuma, A. Ramani and B. Grammaticos, Phys. Lett. **A174**(1993) 387.
- [36] F.W. Nijhoff, V. G. Papageorgiou, Phys. Lett. **A153**(1991) 337.
- [37] V. G. Papageorgiou, F. W. Nijhoff, B. Grammaticos and A. Ramani, Phys. Lett. A **164** (1992) 57.
- [38] A. Ramani and B. Grammaticos, J. Phys. A **25** (1992) L633.
- [39] K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos and A. Ramani, Lett. Math. Phys. **29** (1993) 49.
- [40] J. Hietarinta and K. Kajiwara, “Rational Solutions to d- P_{IV} ”, preprint, solv-int/9705002, to appear in *Proceedings of the Second Workshop on Symmetries and Integrability of Difference Equations* (Cambridge).
- [41] A.P. Bassom and P.A. Clarkson, Phys. Lett. **A194**(1994) 358.
- [42] K.M.Tamizhmani, A. Ramani, B. Grammaticos and Y. Ohta, Lett. Math. Phys. **38**(1996) 289.

- [43] K. Kajiwara, Y. Ohta, J. Satsuma, B. Grammaticos and A. Ramani, J. Phys. A **27** (1994) 915.
- [44] J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, J. Hietarinta and A. Ramani, J. Phys. A **28**(1995) 3541 .
- [45] K. Kajiwara, K. Yamamoto and Y. Ohta, Phys. Lett. **A232**(1997), 189.
- [46] K. Kajiwara and Y. Ohta, J. Math. Phys. **37**(1996), 4693.
- [47] F. Nijhoff, J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos and A. Ramani, Inverse Problems **12**(1996) 697.
- [48] S. Nakao, K. Kajiwara and D. Takahashi, in preparation.
- [49] K. Kajiwara, Y. Ohta and J. Satsuma, J. Math. Phys. **36**(1995) 4162.
- [50] B.Grammaticos, F.W.Nijhoff, V.G.Papageorgiou, A.Ramani and J.Satsuma, Phys. Lett. **A185** (1994) 446.
- [51] Y. Ohta, K. Kajiwara and J. Satsuma, in *Proceedings of the Workshop on Symmetries and Integrability of Difference Equations*, (CRM Proceedings and Lecture Notes Series, AMS, 1996), 265.
- [52] A. Ramani and B. Grammaticos, Physica **A 228**, 160 (1996).
- [53] 坂井 秀隆, 「Painlevé VI 型 q -差分方程式の研究」, 京都大学修士論文 (1995)
- [54] M. Jimbo and H. Sakai, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 145.
- [55] M. Jimbo, H. Sakai, B. Grammaticos and A. Ramani, “Bilinear Structure and Schlesinger Transforms of the q -P_{III} and q -P_{VI} Equation”, preprint, solv-int/9601004.
- [56] B. Grammaticos and A. Ramani, 国際シンポジウム “Advances in Soliton Theory and Its Applications – The 30th Anniversary of the Toda Lattice –”(葉山, 1996) における講演.
- [57] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani and H. Sakai, “Degeneration through coalescence of the q -Painlevé VI equation”, preprint.
- [58] 坂井 秀隆, private communication.
- [59] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani, D. Takahashi and K.M. Tamizhmani, Phys. Lett. **A226**(1997) 53.
- [60] D.Takahashi, T.Tokihiro, B.Grammaticos, Y.Ohta and A.Ramani, J. Phys. A **30**(1997) 7953.