q-パンルヴェ方程式の超幾何解

梶原　健司（九大数理）

Collaborated with:

増田　哲　　　（神戸大自然）

野海正俊　　　（神戸大自然）

太田泰広　　　（神戸大自然）

山田泰彦　　　（神戸大理）

講演の内容

- パンルヴェ方程式とq-パンルヴェ方程式
  - 背景とこれまでの研究
  - 対称性と古典解：超幾何解と代数解
    (PIV と qPIV を例にして)
- q-パンルヴェ方程式の超幾何解
  - 何が難しいのか
  - 平面曲線の幾何による定式化
  - q-パンルヴェ方程式の超幾何解

パンルヴェ方程式と離散パンルヴェ方程式(1)

パンルヴェ方程式

- 「パンルヴェ性」を持つ２階非線形常微分方程式（８種類)
- 初期値空間＝定義多様体
- 対称性

  Affine Weyl 群：Bäcklund 変換のなす群
- 解
  - 古典函数への還元不能性：解は新しい超越函数を定義する
  - 古典解：パラメータ空間の特別な場所
    - 代数函数解：Weyl chamber の重心=付随する Dynkin図形の自己同形に関する不動点
    - 超幾何解：Weyl 群の鏡映面
- 定式化
  - 線形方程式のモノドロミー保存変形：“Lax Pair”
  - Hamilton formalism, τ 函数

パンルヴェ方程式と離散パンルヴェ方程式(2)

離散パンルヴェ方程式

- 「特異点閉じ込め」の性質を持つ２階非線形常差分方程式（たくさん）
- 定義多様体＝初期値空間（Sakai理論）
- 対称性：Affine Weyl 群＝Bäcklund 変換のなす群
- 解：
  - 還元不能性？
  - 古典解
    - 代数函数解：まだほとんど求められていない
    - 超幾何解：今回の講演
- 定式化
  - 線形差分方程式の両立条件：q-P_{VI}, q-$P_{\mathrm{III,IV}}$ など一部のもの

パンルヴェ方程式とAffine Weyl群

P_{IV}の対称形式：

$$\varphi_0' = \varphi_0(\varphi_1 - \varphi_2) + \alpha_0$$
$$\varphi_1' = \varphi_1(\varphi_2 - \varphi_0) + \alpha_1$$
$$\varphi_2' = \varphi_2(\varphi_3 - \varphi_1) + \alpha_2$$

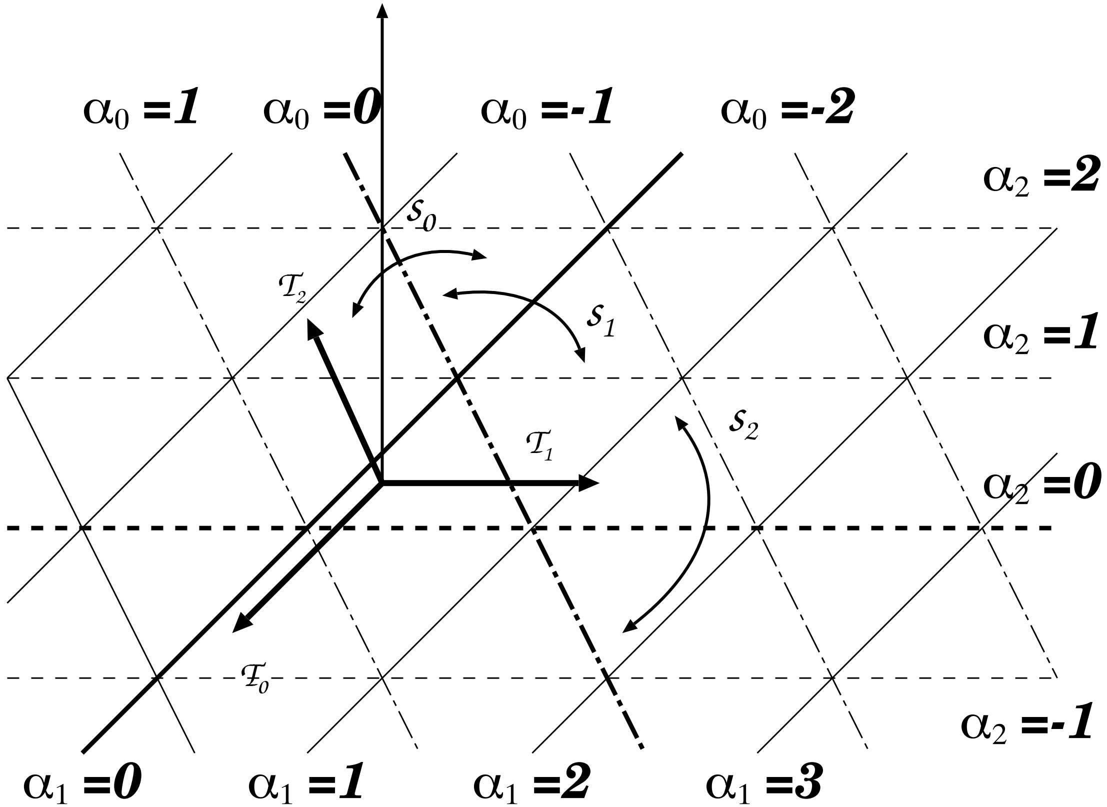
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = t$$

Bäcklund変換： $\langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle = \widetilde{W}(A_2^{(1)})$

$$s_i^2 = 1, \quad (s_i s_{i+1})^3 = 1, \quad \pi^3 = 1, \quad \pi s_i = s_{i+1}\pi \quad (i = 0, 1, 2)$$

	α_0	α_1	α_2	φ_0	φ_1	φ_2
s_0	$-\alpha_0$	$\alpha_1 + \alpha_0$	$\alpha_2 + \alpha_0$	φ_0	$\varphi_1 + \alpha_0/\varphi_0$	$\varphi_2 - \alpha_0/\varphi_0$
s_1	$\alpha_0 + \alpha_1$	$-\alpha_1$	$\alpha_2 + \alpha_1$	$\varphi_0 - \alpha_1/\varphi_1$	φ_1	$\varphi_2 + \alpha_1/\varphi_1$
s_2	$\alpha_0 + \alpha_2$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$-\alpha_2$	$\varphi_0 + \alpha_2/\varphi_2$	$\varphi_1 - \alpha_2/\varphi_2$	φ_2
π	α_1	α_2	α_0	φ_1	φ_2	φ_0

Affine Weyl 群と離散パンルヴェ方程式



平行移動 $T_1 = \pi s_2 s_1, \quad T_1(\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}) = \{\alpha_0 + 1, \alpha_1 - 1, \alpha_2\}$

dPII（の一つ）

$$\overline{\varphi}_1 = t - \varphi_0 - \varphi_1 - \frac{\alpha_0}{\varphi_0}$$

$$\overline{\varphi}_0 = t - \varphi_0 - \overline{\varphi}_1 + \frac{\alpha_1}{\overline{\varphi}_1}$$

$$\varphi = \varphi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2), \quad \overline{\varphi} = T_1(\varphi) = \varphi(\alpha_0 + 1, \alpha_1 - 1, \alpha_2)$$

PIV の古典解

$$\varphi_0' = \varphi_0(\varphi_1 - \varphi_2) + \alpha_0$$
$$\varphi_1' = \varphi_1(\varphi_2 - \varphi_0) + \alpha_1 \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = t$$
$$\varphi_2' = \varphi_2(\varphi_3 - \varphi_1) + \alpha_2$$

有理解 $\qquad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1/3, \quad \varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = t/3$

平行移動によって各Weyl chamber の重心に有理解

Riccati 解　もしくは　超幾何解

$$\alpha_2 = 0 \longrightarrow \varphi_2 = 0 \longrightarrow \varphi_0' = \varphi_0(t - \varphi_0) + \alpha_1$$

線形化によって：Hermite の方程式

$$\varphi_0 = \frac{\psi'}{\psi}, \quad \psi" = t\psi + \alpha_1\psi$$

平行移動によって各鏡映面上に超幾何解

q-PIV & q-PIII

$$\overline{f_0} = a_0 a_1 f_1 \frac{1 + a_2 f_2 + a_2 a_0 f_2 f_0}{1 + a_0 f_0 + a_0 a_1 f_0 f_1}$$

$$\overline{f_1} = a_1 a_2 f_2 \frac{1 + a_0 f_0 + a_0 a_1 f_0 f_1}{1 + a_1 f_1 + a_1 a_2 f_1 f_2} \qquad a_0 a_1 a_2 = q, \quad f_0 f_1 f_2 = qt^2$$

$$\overline{f_2} = a_2 a_0 f_0 \frac{1 + a_1 f_1 + a_1 a_2 f_1 f_2}{1 + a_2 f_2 + a_2 a_0 f_2 f_0}$$

Bäcklund変換： $\langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle = \widetilde{W}(A_2^{(1)})$

$$s_i^2 = 1, \quad (s_i s_{i+1})^3 = 1, \quad \pi^3 = 1, \quad \pi s_i = s_{i+1} \pi \quad (i = 0, 1, 2)$$

	a_0	a_1	a_2	f_0	f_1	f_2
s_0	a_0^{-1}	$a_1 a_0$	$a_2 a_0$	f_0	$f_1 \dfrac{a_0 + f_0}{1 + a_0 f_0}$	$f_2 \dfrac{1 + a_0 f_0}{a_0 + f_0}$
s_1	$a_0 a_1$	a_1^{-1}	$a_2 a_1$	$f_0 \dfrac{1 + a_1 f_1}{a_1 + f_1}$	f_1	$f_2 \dfrac{a_1 + f_1}{1 + a_1 f_1}$
s_2	$a_0 a_2$	$a_1 a_2$	a_2^{-1}	$f_0 \dfrac{a_2 + f_2}{1 + a_2 f_2}$	$f_1 \dfrac{1 + a_2 f_2}{a_2 + f_2}$	f_2
π	a_1	a_2	a_0	f_1	f_2	f_0

q-PIV の古典解

$$\overline{f_0} = a_0 a_1 f_1 \frac{1 + a_2 f_2 + a_2 a_0 f_2 f_0}{1 + a_0 f_0 + a_0 a_1 f_0 f_1}$$

$$\overline{f_1} = a_1 a_2 f_2 \frac{1 + a_0 f_0 + a_0 a_1 f_0 f_1}{1 + a_1 f_1 + a_1 a_2 f_1 f_2} \qquad a_0 a_1 a_2 = q, \quad f_0 f_1 f_2 = q t^2$$

$$\overline{f_2} = a_2 a_0 f_0 \frac{1 + a_1 f_1 + a_1 a_2 f_1 f_2}{1 + a_2 f_2 + a_2 a_0 f_2 f_0}$$

- 代数解： $a_0 = a_1 = a_2 = q^{1/3}, \quad f_0 = f_1 = f_2 = (qt^2)^{1/3}$

  平行移動によってWeyl chamber の重心に代数解

- 超幾何解：鏡映面上 $a_2 = 1, \quad f_2 = -1$

  Riccati 方程式： $\overline{f}_1 = -\dfrac{q}{a_0} \dfrac{(1 - q^2 t^2) f_1 - a_0 t^2}{f_1}, \quad f_0 = -\dfrac{qt^2}{f_1}$

  線形化: $f_1 = -\dfrac{q}{a_0} \dfrac{\overline{G}}{G}, \quad \overline{G} = -(1 - t^2) G + a_0^2 t^2 \, \underline{G}$

  Continuous q-Hermite 多項式： $a_0 = q^N$

平行移動とq-PIII

平行移動 $T_1 = \pi s_2 s_1, \quad T_1(\{a_0, a_1, a_2\}) = \{a_0 q, a_1/q, a_2\}$

q-PIII:

$$T_1(f_1) = \frac{qt^2}{f_0 f_1}\,\frac{1+a_0 f_0}{a_0+f_0}$$

$$T_1^{-1}(f_0) = \frac{qt^2}{f_0 f_1}\,\frac{a_1+f_1}{1+a_1 f_1}.$$

- t 方向にも（拡大） affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の構造
- q-PIV と q-PIII は $\widetilde{W}(A_1^{(1)}\times A_2^{(1)})$ 対称性を持つ
- q-PIII は２種類の超幾何解を持つ（一つは Jackson's q-Bessel 函数）
- Affine Weyl 群の平行移動部分→離散力学系＝離散パンルヴェ方程式

パンルヴェ・離散パンルヴェ方程式と坂井理論(1)

- パンルヴェ・離散パンルヴェ方程式の初期値空間の構成とその分類：Ｐ２の9点 blow-up から得られる曲面とその退化
- 点の入れ替え操作とクレモナ変換：アフィンワイル群
  その平行移動のなす離散力学系＝離散パンルヴェ方程式
- 得られる曲面：２２通り，そのうち８つの曲面がワイル群作用と可換なflow（離散時間発展の連続極限）を許容する
  ＝パンルヴェ方程式
- 離散時間発展(n: 独立変数)
  - 通常の差分　an+b　：11通り
  - q-差分　q^n　：10通り
  - 楕円差分　$\vartheta[n]$　：1通り

パンルヴェ・離散パンルヴェ方程式と坂井理論(2)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & \nearrow \; A_1^{(1)\prime} \; \searrow & & \\
\boxed{E_8^{(1)} \to E_7^{(1)} \to E_6^{(1)} \to \begin{matrix} D_5^{(1)} \\ (q\mathrm{P_{VI}}) \end{matrix} \to \begin{matrix} A_4^{(1)} \\ (q\mathrm{P_{V}}) \end{matrix} \to \begin{matrix} (A_2+A_1)^{(1)} \\ (q\mathrm{P_{IV}}, q\mathrm{P_{III}}) \end{matrix} \to \begin{matrix} (A_1+A_1')^{(1)} \\ (q\mathrm{P_{II}}) \end{matrix}} & \to & A_1^{(1)} & & A_0^{(1)} \\
\searrow \qquad \searrow \qquad \searrow & \searrow & & \searrow & \\
\begin{matrix} D_4^{(1)} \\ (\mathrm{P_{VI}}) \end{matrix} \to \begin{matrix} A_3^{(1)} \\ (\mathrm{P_{V}}) \end{matrix} \to \begin{matrix} (2A_1)^{(1)} \\ (\mathrm{P_{III}}) \end{matrix} & \to & A_1^{(1)\prime} & \to & A_0^{(1)\prime} \\
\searrow & \searrow & & & \downarrow \\
\begin{matrix} A_2^{(1)} \\ (\mathrm{P_{IV}}) \end{matrix} & \to & \begin{matrix} A_1^{(1)} \\ (\mathrm{P_{II}}) \end{matrix} & \to & \begin{matrix} A_0^{(1)} \\ (\mathrm{P_{I}}) \end{matrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{matrix} \mathrm{P_{VI}} \\ \text{Gauss} \\ D_4^{(1)} \end{matrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} \mathrm{P_{V}} \\ \text{Kummer} \\ A_3^{(1)} \end{matrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} \mathrm{P_{III}} \\ \text{Bessel} \\ (2A_1)^{(1)} \end{matrix} \\
 & & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & \begin{matrix} \mathrm{P_{VI}} \\ \text{Weber} \\ A_2^{(1)} \end{matrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} \mathrm{P_{II}} \\ \text{Airy} \\ A_1^{(1)} \end{matrix}
\end{array}
$$

q-パンルヴェ方程式の解として現れる超幾何函数は何？

(特にE型)

q-パンルヴェ方程式 (1)

$(A_1 + A_1')^{(1)} \quad (q\mathrm{P_{II}})$

$$(\overline{f}f - 1)(f\underline{f} - 1) = \frac{at^2 f}{f+t}, \quad \overline{t} = qt$$

$(A_2 + A_1)^{(1)} \quad (q\mathrm{P_{III}})$

$$\overline{g}gf = b_0 \frac{1 + a_0 t f}{a_0 t + f}, \quad g f \underline{f} = b_0 \frac{a_1/t + g}{1 + g a_1/t}$$

$A_4^{(1)} \quad (q\mathrm{P_V})$

$$\overline{g}g = \frac{(f + b_1/t)(f + 1/b_1 t)}{1 + b_3 f}, \quad f\underline{f} = \frac{(g + b_2/s)(g + 1/b_2 s)}{1 + g/b_3}, \quad s = q^{1/2}t$$

$D_5^{(1)} \quad (q\mathrm{P_{VI}})$

$$\overline{g}g = \frac{(f - a_1 t)(f - a_2 t)}{(f - a_3)(f - a_4)}, \quad f\underline{f} = \frac{(g - b_1 t/q)(g - b_2 t/q)}{(g - b_3)(g - b_4)}, \quad \frac{b_1 b_2}{b_3 b_4} = q\frac{a_1 a_2}{a_3 a_4}$$

q-パンルヴェ方程式 (2)

$E_6^{(1)}$

$$(\overline{g}f-1)(gf-1)=t\overline{t}\,\frac{(f-b_1)(f-b_2)(f-b_3)(f-b_4)}{(f-b_5t)(f-t/b_5)},$$

$$(gf-1)(g\underline{f}-1)=t^2\,\frac{(g-1/b_1)(g-1/b_2)(g-1/b_3)(g-1/b_4)}{(g-b_6t)(g-t/b_6)},$$

$$b_1b_2b_3b_4=1$$

$E_7^{(1)}$

$$\frac{(\overline{g}f-t\overline{t})(gf-t^2)}{(\overline{g}f-1)(gf-1)}=\frac{(f-b_1t)(f-b_2t)(f-b_3t)(f-b_4t)}{(f-b_5)(f-b_6)(f-b_7)(f-b_8)},$$

$$\frac{(gf-t^2)(g\underline{f}-t\underline{t})}{(gf-1)(g\underline{f}-1)}=\frac{(g-t/b_1)(g-t/b_2)(g-t/b_3)(g-t/b_4)}{(g-1/b_5)(g-1/b_6)(g-1/b_7)(g-1/b_8)},$$

$$b_1b_2b_3b_4=q,\quad b_5b_6b_7b_8=1$$

q-パンルヴェ方程式 (3)

$E_8^{(1)}$

$$\frac{(\overline{g}\,\overline{s}t-f)(gst-f)-(\overline{s}^2t^2-1)(s^2t^2-1)}{\left(\frac{\overline{g}}{\overline{s}t}-f\right)\left(\frac{g}{st}-f\right)-\left(1-\frac{1}{\overline{s}^2t^2}\right)\left(1-\frac{1}{s^2t^2}\right)}=\frac{P(f,t,m_1,\ldots,m_7)}{P(f,t^{-1},m_7,\ldots,m_1)},$$

$$\frac{(\underline{f}s\underline{t}-g)(fst-g)-(s^2\underline{t}^2-1)(s^2t^2-1)}{\left(\frac{\underline{f}}{s\underline{t}}-g\right)\left(\frac{f}{st}-g\right)-\left(1-\frac{1}{s^2\underline{t}^2}\right)\left(1-\frac{1}{s^2t^2}\right)}=\frac{P(g,s,m_7,\ldots,m_1)}{P(g,s^{-1},m_1,\ldots,m_7)},$$

$$\begin{aligned}P(f,t,m_1,\ldots,m_7)&=f^4-m_1tf^3+(m_2t^2-3-t^8)f^2\\&\quad+(m_7t^7-m_3t^3+2m_1t)f+(t^8-m_6t^6+m_4t^4-m_2t^2+1),\end{aligned}$$

m_k $(k=1,2,\ldots 7)$: the elementary symmetric functions of k-th degree

$$\overline{t}=qt,\ \ t=q^{1/2}s$$

q-超幾何函数

$$ {}_r\varphi_s\left(\begin{matrix} a_1,\ldots,a_r \\ b_1,\ldots,b_s \end{matrix};q,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_n\cdots(a_r;q)_n}{(b_1;q)_n\cdots(b_s;q)_n(q;q)_n}\left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r}z^n, $$

$$ (a;q)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a). $$

${}_{r+1}\varphi_r$:

- "balanced": $qa_1a_2\cdots a_{r+1}=b_1b_2\cdots b_r,\quad z=q$
- "well-poised": $qa_1=a_2b_1=\cdots=a_{r+1}b_r$
- "very-well-poised": well-poised + $a_2=qa_1^{1/2},\quad a_3=-qa_1^{1/2}$

Very-well-poised ${}_{r+1}\varphi_r$:

$$ {}_{r+1}W_r(a_1;a_4,\ldots,a_{r+1};q,z)={}_{r+1}\varphi_r\left(\begin{matrix} a_1,qa_1^{1/2},-qa_1^{1/2},a_4\ldots,a_{r+1} \\ a_1^{1/2},-a_1^{1/2},qa_1/a_4,\ldots,qa_1/a_{r+1} \end{matrix};q,z\right) $$

解として現れる超幾何函数

$$E_8^{(1)} \to E_7^{(1)} \to E_6^{(1)} \to D_5^{(1)} \to A_4^{(1)} \to (A_2+A_1)^{(1)} \to (A_1+A_1')^{(1)}$$

$$\begin{array}{c}\text{balanced}\\ {}_{10}W_9\end{array} \to {}_8W_7 \to \begin{array}{c}\text{balanced}\\ {}_3\varphi_2\end{array} \to {}_2\varphi_1 \to {}_1\varphi_1 \to \begin{array}{c}{}_1\varphi_1\left(\begin{array}{c}a\\0\end{array};q,z\right)\\ {}_1\varphi_1\left(\begin{array}{c}0\\b\end{array};q,z\right)\end{array} \to {}_1\varphi_1\left(\begin{array}{c}0\\-q\end{array};q,z\right)$$

- 注意：”balanced 3φ2”はこの場合

$$ {}_3\varphi_2\left(\begin{array}{c}a,b,c\\d,e\end{array};q,de/abc\right)$$

- “terminating” series $a_i \sim q^{-N}, \quad N \in \mathbb{N}$: 直交多項式

$E_7^{(1)}$	terminating balanced ${}_4\varphi_3$	Askey-Wilson polynomials
$E_6^{(1)}$	terminating ${}_3\varphi_2$	big q-Jacobi polynomials
$D_5^{(1)}$	terminating ${}_2\varphi_1$	little q-Jacobi polynomials
$A_4^{(1)}$	terminating ${}_1\varphi_1$	q-Laguerre polynomials

何が難しいのか？（１）

$(A_1 + A_1')^{(1)} \quad (q\mathrm{P_{II}})$

$$(\overline{f} f - 1)(f \underline{f} - 1) = \frac{at^2 f}{f + t}, \quad \overline{t} = qt$$

Riccati 方程式

$$\overline{f} = \frac{af + b}{cf + d} \longrightarrow \overline{f} = \frac{1}{f} - qt, \quad a = q$$

線形化

$$f = \frac{\Psi}{\Phi} \longrightarrow f = \frac{\overline{\Phi}}{\Phi}, \quad \overline{\Phi} + t\Phi = \underline{\Phi}$$

級数解

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \longrightarrow \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;q)_n(-q;q)_n}(-qt)^n = {}_1\varphi_1\left(\begin{matrix} 0 \\ -q \end{matrix}; q, -qt\right)$$

$\longrightarrow$ 何も難しくない！

何が難しいのか？（2）

- q-P$_{\mathrm{VI}}$以下のもの：とりあえず解までわかっていた
  （Sakai,K-N-Y, K-M-N-O-Y,K-Kimura,...）
- 問題は E型：Riccati 化まではできていた

  (Murata-Sakai-Yoneda, Grammaticos-Ramani-Tamizhmani-Tamizhmani)

「複雑さ」の問題

$$\overline{f}=\frac{af+b}{cf+d} \;\to\; f=F/G \;\to\; h\overline{F}=aF+bG, \quad h\overline{G}=cF+dG$$

$$\to \quad \begin{aligned} &h\underline{hb}\overline{F}-\underline{h}(a\underline{b}+b\underline{d})F+b(\underline{ad}-\underline{bc})\underline{F}=0,\\ &h\underline{hc}\overline{G}-\underline{h}(d\underline{c}+c\underline{a})G+c(\underline{ad}-\underline{bc})\underline{G}=0 \end{aligned}$$

q-超幾何函数の three-term relation:

$$A\left(\overline{\Phi}-\Phi\right)+B\Phi+C\left(\underline{\Phi}-\Phi\right)=0 \;\to\; A\overline{\Phi}+(B-A-C)\Phi+C\underline{\Phi}=0$$

第２項の係数が巨大で，答を知らないととても手が出ない！

E型特有の問題：f そのものは超幾何函数の比にならない (Ramani-Grammaticos-Ohta)

q-パンルヴェ方程式の定式化（１）

$(x:y:z)$: P2の同次座標　　$f(x,y,z)$: d次同次多項式

$f(x,y,z)=0$: P2上のd次平面曲線, 係数の自由度 $\binom{d+2}{2}-1=\frac{d(d+3)}{2}$

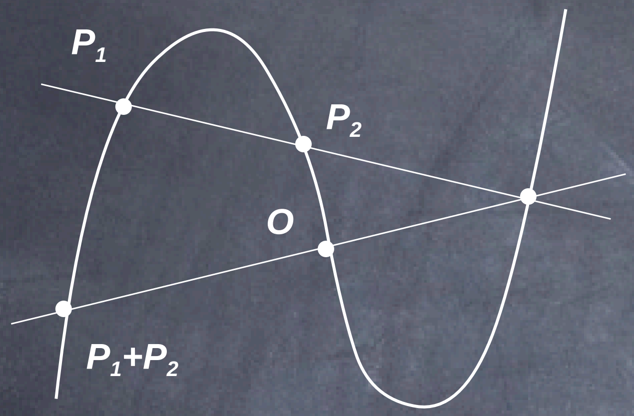
- 3次曲線(Cubic)

$$F(x,y,z)=c_1x^3+c_2x^2y+c_3x^2z+c_4xy^2+c_5xyz+c_6xz^2+c_7y^3+c_8y^2z+c_9yz^2+c_{10}z^3=0$$

- 9点を決めればそれらを通る3次曲線 F=0 が決まる
- 2つの3次曲線は9点で交わる(ベズーの定理)
- 8点 $P_1,P_2,\ldots,P_8$ を通る3次曲線は1-parameter family $\lambda F+\mu G=0$ をなす．(pencil)
- それらの曲線は全て F,Gの9番めの共通零点を通る．（９番目の共通零点は自由に動けない：８点から自動的に決まる）

q-パンルヴェ方程式の定式化（２）

3次曲線上の加法



$P_1+P_2=P_2+P_1$:自明

$(P_1+P_2)+P_3=P_1+(P_2+P_3)$

非自明：二つの3次曲線の共通零点に関する性質から従う

注意： $P_1, P_2, \ldots$ ： 3次曲線C上の点．C上の加法に関して

$$P_1, P_2, P_3 \text{ are on a LINE} \iff P_1+P_2+P_3=0$$

$$P_1, \ldots, P_6 \text{ are on a CONIC} \iff P_1+\cdots+P_6=0$$

$$P_1, \ldots, P_9 \text{ are on a CUBIC} \iff P_1+\cdots+P_9=0$$

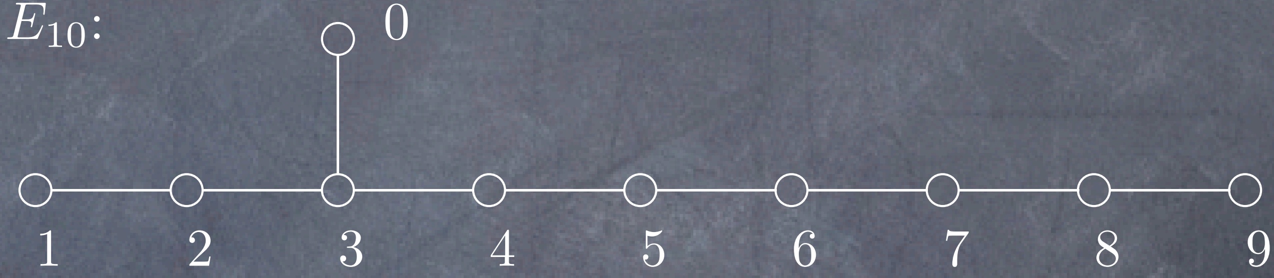
q-パンルヴェ方程式の定式化（3）

$\mathcal{M}_{3,n}$: P^2 上で一般の位置にある10点の座標変換に関する同値類全体

$$\mathcal{M}_{3,10} = \mathrm{GL}(3)\backslash \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_9 & x_{10} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_9 & y_{10} \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_9 & z_{10} \end{bmatrix} \right\} / (\mathbb{C}^\times)^{10}$$

$$W(E_{10}) = \langle s_0, \ldots, s_9 \rangle$$

E_{10}:



$s_i s_j = s_j s_i$ $\qquad$ $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$

ただし： $s_i \ (i = 1, \ldots, 9)$: $\quad P_i \leftrightarrow P_{i+1}$

s_0 : $\quad P_1, P_2, P_3$ を基点とするクレモナ変換

$P_1 = (1:0:0),\ P_2 = (0:1:0),\ P_3 = (0:0:1) \quad s_0 : (x:y:z) \mapsto (yz:zx:xy)$

$$\mathbb{Z}^8 \subset W(E_9) = W(E_8^{(1)}) \subset W(E_{10})$$

Action of $\mathbb{Z}^8$	$\Longleftrightarrow$	(Elliptic) Painlevé eq.
$P_1, \ldots, P_9$	$\Longleftrightarrow$	parameter & indep. var.
P_{10}	$\Longleftrightarrow$	dependent variable

q-パンルヴェ方程式の定式化（4）

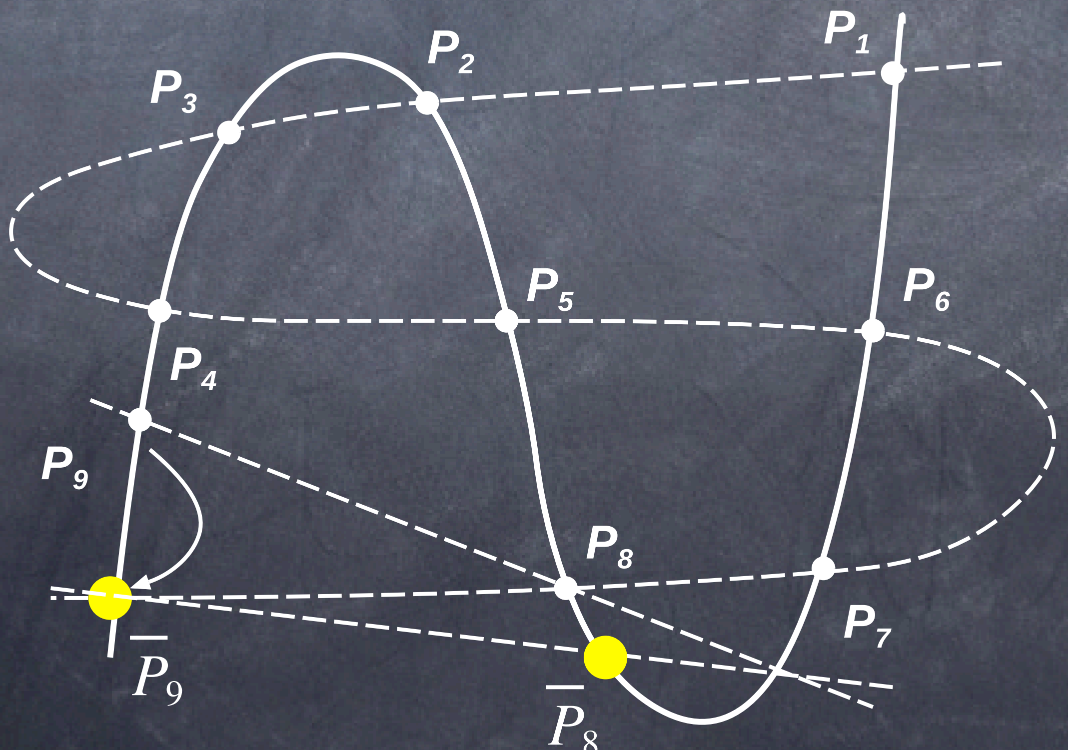
平行移動の作用＝「動く3次曲線の上の加法」

例： T_{89} $\qquad$ C_0： $P_1,\ldots,P_9$ を通る3次曲線

(1) C_0 上の加法を用いて新しい点 $\overline{P}_8,\overline{P}_9$ を次のルールで決める

$$\overline{P}_i = P_i \ (i\neq 8,9),\quad P_8+P_9=\overline{P}_8+\overline{P}_9,\quad P_1+\cdots+P_8+\overline{P}_9=O$$

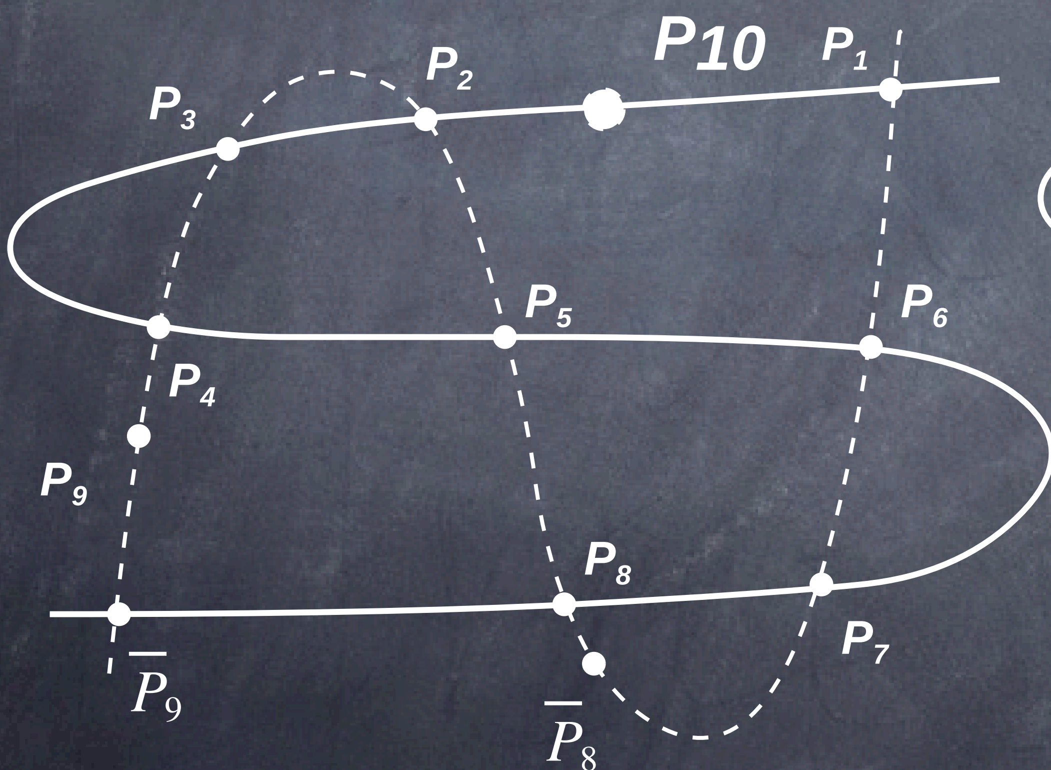
$\overline{P}_9$ は $P_1\ldots,P_8$ から作られるcubic pencilの９番目の共通零点

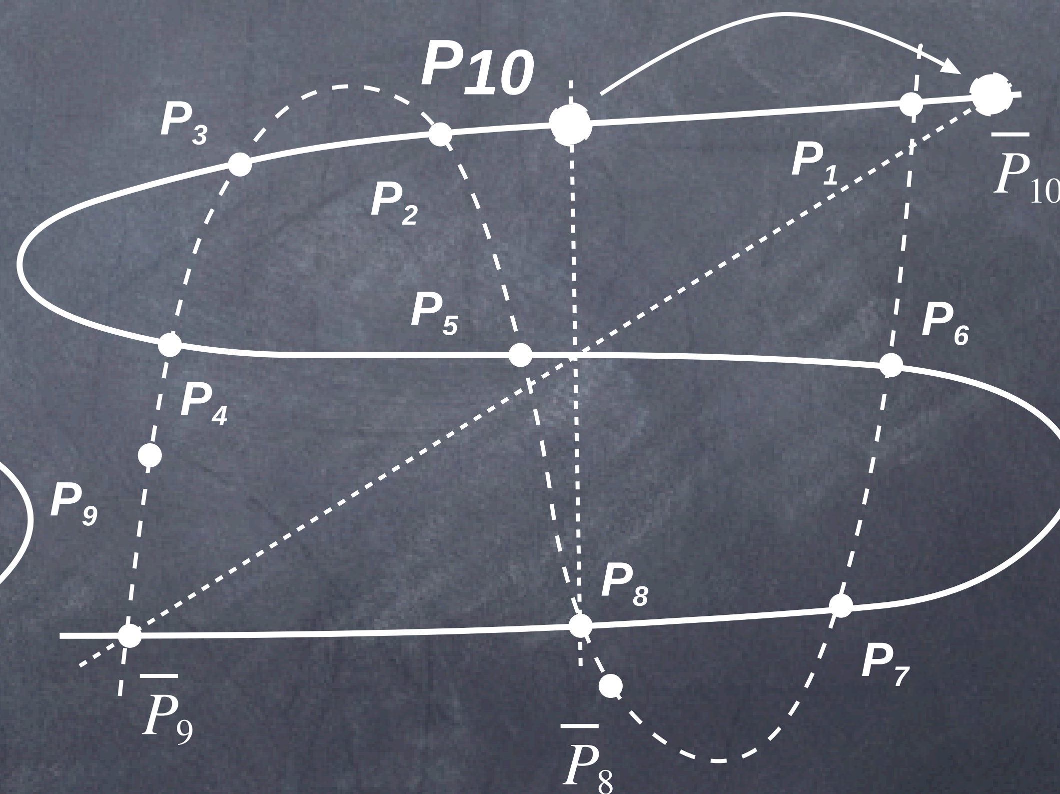


q-パンルヴェ方程式の定式化（5）

(2) λ, μ を調節してcubic pencil $\lambda F + \mu G = 0$ が P_{10} を通るようにする

(3) 最後に，新しい3次曲線C上の加法を用いて $\overline{P}_{10} + \overline{P_9} = P_{10} + P_8$ で $\overline{P}_{10}$ を定める.





超幾何解の記述（１）

Riccati 方程式に帰着する場合

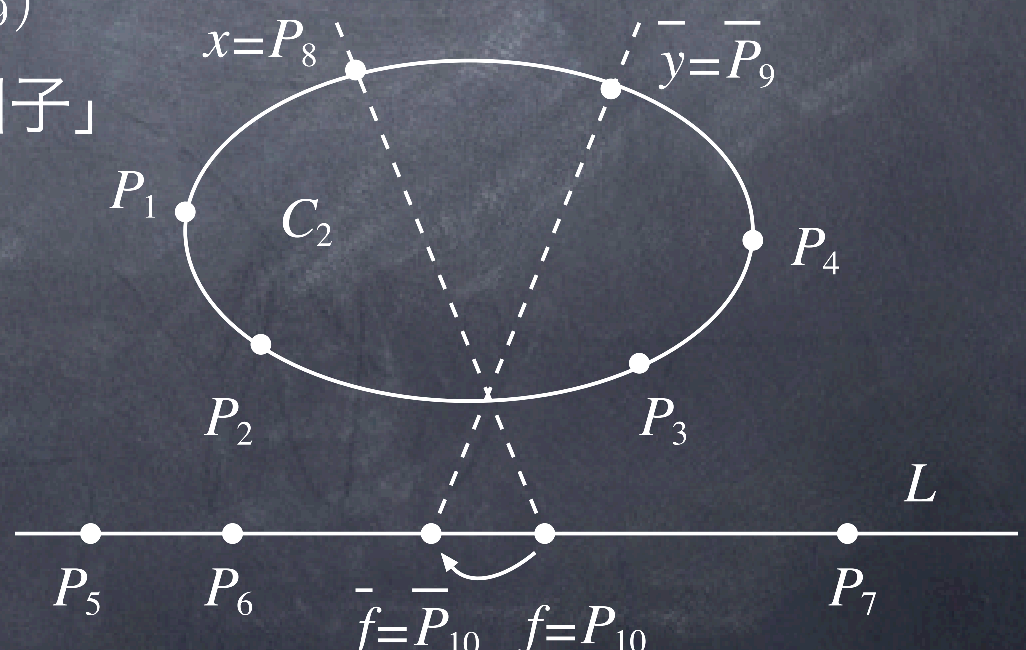
- 3次曲線を定める９点のうち，３点が１直線上にある場合
- ある点が他の点と無限に近い場合

P_5, P_6, P_7 が１直線上→3次曲線*C*が直線Lと２次曲線*C₂*に分解

$\because\ P_1+\cdots+P_8+\overline{P}_9 = O,\ P_5+P_6+P_7 = O\ \to P_1+P_2+P_3+P_4+P_8+\overline{P}_9 = O$

$L(P_5, P_6, P_7),\quad C_2(P_1, P_2, P_3, P_4, P_8, \overline{P}_9)$

$\to\ P_{10} \in L\ \to \overline{P}_{10} \in L$ ：L は「不変因子」



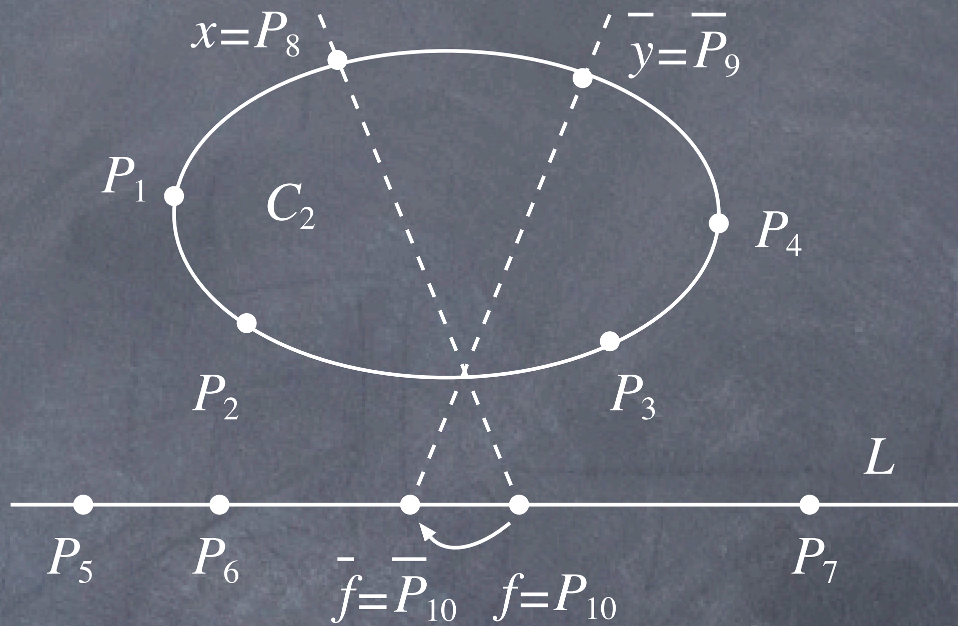
超幾何解の記述（2）

$f = (f_1 : f_2 : f_3),\ x = (x_1 : x_2 : x_3)$ etc.

Lの方程式：

$$(a, f) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0$$

$$(a, \overline{f}) = a_1 \overline{f}_1 + a_2 \overline{f}_2 + a_3 \overline{f}_3 = 0$$



$$P_1 = (1:0:0)$$
$$P_2 = (0:1:0)$$
$$P_3 = (0:0:1)$$

となるように座標系を取れば，次が成り立つ：

$$\lambda \overline{f} = (a, \overline{y}) D f - (a, D f) \overline{y}$$

$$\mu f = (a, x) D^{-1} \overline{f} - (a, D^{-1} f) x$$

$$D = \mathrm{diag}\ \left(\frac{x_2 x_3}{\overline{y}_2 \overline{y}_3}, \frac{x_3 x_1}{\overline{y}_3 \overline{y}_1}, \frac{x_1 x_2}{\overline{y}_1 \overline{y}_2} \right)$$

ただし，$\lambda \mu = (a, x)(a, \overline{y})$

$$\to\ \lambda = (a, x),\ \mu = (a, \overline{y})$$

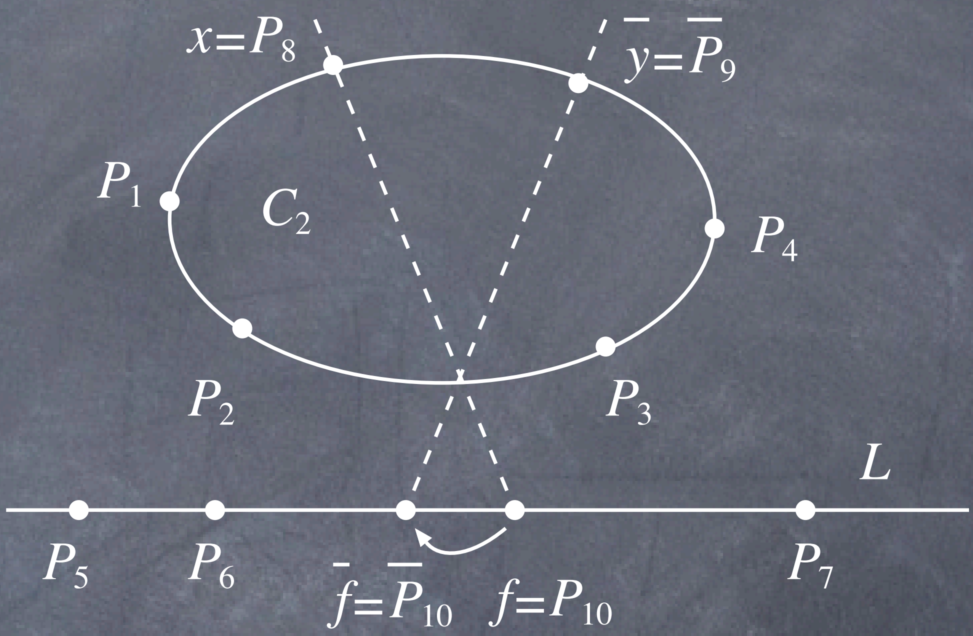
超幾何解の記述（3）

GL(3)（座標変換）不変な形で書き直す

Lの方程式

$(a, f) = 0 = \det[P_5, P_6, f]$ etc.

→　行列式で表示できる



$d_{abc} = \det[P_a, P_b, P_c]$ とするとき,

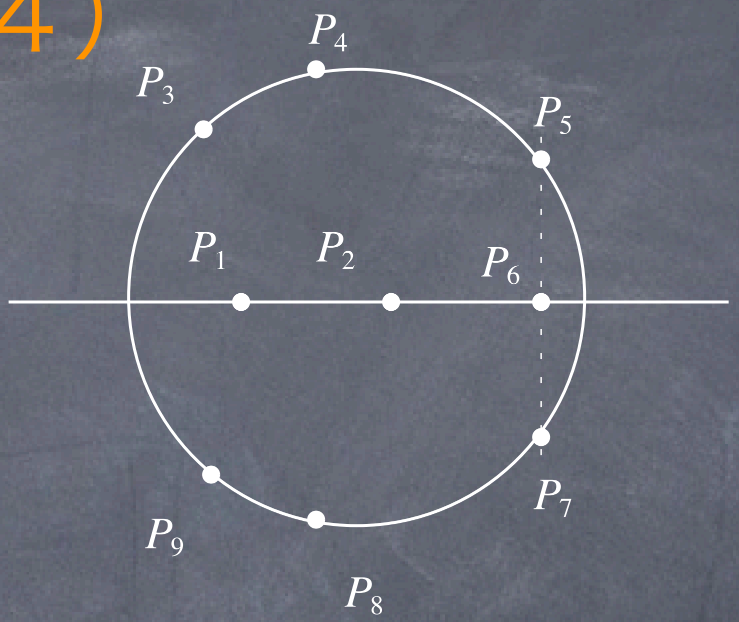
$d_{23\ 10}$ に関する3-term relation:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d_{239}d_{318}d_{12\bar{9}}d_{568}}{d_{18\bar{9}}}\left(\frac{d_{13\bar{9}}}{d_{138}}\boxed{d_{23\ \overline{10}}}-\boxed{d_{23\ 10}}\right)\\&+\frac{d_{138}d_{319}d_{ij\underline{8}}d_{569}}{d_{19\underline{8}}}\left(\frac{d_{13\underline{8}}}{d_{139}}\boxed{d_{23\ \underline{10}}}-\boxed{d_{23\ 10}}\right)=d_{123}d_{389}d_{562}\boxed{d_{23\ 10}}\end{aligned}}$$

⟹ 超幾何函数の3-term relation と同じ形！

超幾何解の記述（4）

$E_7^{(1)}$ の場合



Co: 6点が conic上，3点が line 上

パラメータ表示:

$$P_i = \begin{cases} (-u_i : 0 : 1) & (i = 1, 2, 6) \\ (1, u_i, u_i^2) & (i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \end{cases}$$

P_5, P_6, P_7 が共線:　$\det[P_5, P_6, P_7] = 0 \ \leftrightarrow u_5 u_6 u_7 = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} & A(l\overline{F} - F) - BF + C(m\underline{F} - F) = 0, \quad F = d_{23\ 10} \\ & \frac{A}{B} = \frac{qu_9[58][138][568][239]}{u_3u_5[26][89][8\overline{9}][18\overline{9}]}, \quad l = \frac{[3\overline{9}][13\overline{9}]}{[38][138]}, \\ & \left(\frac{C}{B}, m\right) = \left(\frac{A}{B}, l\right)\Big|_{8\leftrightarrow 9, \underline{8}\leftrightarrow\overline{9}}, [ij] = \quad u_i - u_j, \quad [ijk] = 1 - u_iu_ju_k \end{aligned}}$$

平行移動　T_{89} の作用：　$\overline{u}_i = u_i \ (i \neq 8, 9), \quad \overline{u}_8 = u_8/q, \quad \overline{u}_9 = qu_9$

$$q = 1/(u_1u_2u_3u_4u_8u_9)$$

超幾何解の記述（5）

Very-well-poised ${}_8\varphi_7$ series:

$$\Phi = {}_8W_7(a;b,c,d,e,f;z) = {}_8\varphi_7\left(\begin{matrix} a, qa^{1/2}, -qa^{1/2}, b, c, d, e, f \\ a^{1/2}, -a^{1/2}, qa/b, qa/c, qa/d, qa/e, qa/f \end{matrix} ; q, z\right) \quad z = \frac{q^2a^2}{bcdef}$$

3-term relation (Ismail-Rahman 1991)

$$U_1(\overline{\Phi} - \Phi) + U_2\Phi + U_3(\underline{\Phi} - \Phi) = 0, \quad \overline{\Phi} = {}_8W_7(a;b,c,qd,e/q,f;z),$$

$$U_1 = \frac{(1-d)(1-a/d)(1-q/d)(1-aq/be)(1-aq/ce)(1-aq/ef)}{e(1-d/e)(1-d/e)},$$

$$U_2 = \frac{qa^2}{bcdef}\left(1 - \frac{qa}{de}\right)(1-b)(1-c)(1-f),$$

$$U_3 = \frac{(1-e)(1-a/e)(1-q/e)(1-aq/bd)(1-aq/cd)(1-aq/df)}{d(1-e/d)(1-e/d)}.$$

得られた3-term relation と比較して：

$$F = {}_8W_7(a;b,c,d,e,f;q^2a^2/bcdef), \quad \begin{matrix} a = u_2u_5^2, & b = u_5/u_8, & c = u_5/u_9, \\ d = qu_5/u_3, & e = u_5/u_4, & f = u_2/u_6. \end{matrix}$$

超幾何解の構成（１）

$$E_7^{(1)} \qquad \frac{(\overline{g}f-t\overline{t})(gf-t^2)}{(\overline{g}f-1)(gf-1)}=\frac{(f-b_1t)(f-b_2t)(f-b_3t)(f-b_4t)}{(f-b_5)(f-b_6)(f-b_7)(f-b_8)},$$

$$\frac{(gf-t^2)(g\underline{f}-\underline{t}t)}{(gf-1)(g\underline{f}-1)}=\frac{(g-t/b_1)(g-t/b_2)(g-t/b_3)(g-t/b_4)}{(g-1/b_5)(g-1/b_6)(g-1/b_7)(g-1/b_8)},$$

$$b_1b_2b_3b_4=q, \quad b_5b_6b_7b_8=1$$

幾何から求めた結果から直接解が構成できるわけではない（まだ）
もう一作業必要！

ポイント：f,g の適当な射影変換が超幾何函数の比となる！

例えば： $z=\dfrac{g-t/b_1}{g-1/b_5}$

超幾何解の構成（２）

- f,gに関してRiccati 化する（結果あり：M-S-Y, R-G-T-T)
- z に関する Riccati 方程式に書き直す
  f,g のまま線形化すると（超幾何函数の線形結合だから）同定が困難
- 分離定数・ゲージ因子をうまく選んで，得られる線形方程式を超幾何函数の隣接関係式と同定する
  （「うまく選ぶ」ときに試行錯誤が必要だが，「答」がわかっているから何とかなる）

最終的な結果： $b_1 b_3 = b_5 b_7$ のとき

$$z = \frac{g - t/b_1}{g - 1/b_5} = \frac{1 - b_3/b_1}{1 - b_3/b_5 t} \, \frac{{}_8W_7\left(\dfrac{b_1 b_8}{b_3 b_5}; \dfrac{q b_8}{b_5}, \dfrac{b_2}{b_3}, \dfrac{b_1 t}{b_5}, \dfrac{b_1}{b_5 t}, \dfrac{b_4}{b_3}; q, \dfrac{b_5}{b_6}\right)}{{}_8W_7\left(\dfrac{b_1 b_8}{b_3 b_5}; \dfrac{b_8}{b_5}, \dfrac{b_2}{b_3}, \dfrac{b_1 t}{b_5}, \dfrac{b_1}{b_5 t}, \dfrac{b_4}{b_3}; q, \dfrac{q b_5}{b_6}\right)}$$

まとめ＆今後の展望（１）

q-パンルヴェ方程式の超幾何解

$$E_8^{(1)} \to E_7^{(1)} \to E_6^{(1)} \to D_5^{(1)} \to A_4^{(1)} \to (A_2+A_1)^{(1)} \to (A_1+A_1')^{(1)}$$

$$\begin{array}{c}\text{balanced}\\ {}_{10}W_9\end{array} \to {}_8W_7 \to \begin{array}{c}\text{balanced}\\ {}_3\varphi_2\end{array} \to {}_2\varphi_1 \to {}_1\varphi_1 \to \begin{array}{c} {}_1\varphi_1\left(\begin{array}{c} a \\ 0 \end{array}; q, z\right) \\ {}_1\varphi_1\left(\begin{array}{c} 0 \\ b \end{array}; q, z\right) \end{array} \to {}_1\varphi_1\left(\begin{array}{c} 0 \\ -q \end{array}; q, z\right)$$

具体的な解のリストは：

KMNOY, Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equation, IMRN 2004:47(2004) 2497-2521

- 全ての超幾何解を網羅したものではない（もちろん！）
- determinant solution も一部を除いてまだ
- 代数解もごくわずかの例外を除いてまだ
- τ 函数の理論（現在進行中）

まとめ＆今後の展望（２）

- 方程式とたった１種類の特殊解がわかっただけ．まだ何もわかっていない！
  - 梅村理論の離散版
  - Lax pair　（線形方程式の両立条件としての定式化）
  - KPとの関連
- 他の分野や理論との接点
  - Random matrix
  - 直交函数系・超幾何系
  - 離散曲面論
  - その他もろもろ…

ありがとうございました