

# ソリトン

～ 不思議な波が運んできた，古くて新しい数学の物語 ～

九州大学大学院数理学研究院 梶原 健司

## 1 不思議な波「ソリトン」

最初に，ソリトンとは何か，どのように発見され，理論がどのように発展してきたかをざっと眺めたいと思います．紙数の都合上，微分や積分を始めとする数学的・物理的な基礎事項についてはここでは説明しませんが，講義の際に必要なことはきちんと解説します．とりあえず，物語を読むつもりでお楽しみ下さい．

### 1.1 Scott-Russel, Korteweg, de Vries

私は昨年 10 月に福岡に参りました．現在の自宅の裏が海になっているので，よく家族で海を見に行きます．近くの十郎川の河口に行って波を眺めていますと，水の波というのは意外に複雑な挙動を示すことがわかります．異なる方向に進む波がぶつかり，相互に影響を及ぼしながら，複雑な形，例えば「へ」の字の形や「X」の形ををしながら伝わります．少なくとも，単に一つ一つの波の足し算ではないように見えます．時にはそれらが重なりあって，複雑なパターンを見せたりします．

私が通勤で使う駅の横には，十郎川の小さな支流が流れています．先日の夜，大学から帰る時に川を横目で眺めながら歩いていたら，割と大きな，孤立した波が塊となって，そのままずっと伝わっていくのを見ました．そういう現象を見たことがある人はいらっしゃいませんか？

19 世紀の前半 (1834 年)，スコットランドで「孤立波」に偶然遭遇し，その現象を徹底的に追求した人がいます．造船技術者だった Scott-Russel<sup>1</sup> という人です．彼はその時の観察を次のような記録に残しています．

私は，せまい運河を船が 2 頭の馬に速く引かれていくのを見ていた．船が急にとまった．へさき付近には激しい擾乱が起き，水面の盛り上がりが見えた．その水面の盛り上がりは，大きな速度でへさきを離れ，形を変えることなく，また速度の減少なしに，運河に沿って進みはじめた．約 30 フィートの幅で，約 1.5 フィートの高さの形のまま進む水面の盛り上がりを見ながら，私は馬に乗って時速 8～9 マイルの速さで追いかけた．その高さはゆっくりと減少し，1～2 マイル追いついたが，運河の曲がったところで見失ってしまった．(文献 [5] より引用)

Scott-Russel はこの現象に興味を持ち，さまざまな水槽実験を行って孤立波の性質を調べています．ただ，当時はまだ波動現象の理論が確立されておらず，「孤立波」がそもそも存在し得るのか，当時の物理学，数学の「権威」を巻き込んで大きな論争が起ったようです．結局，この論争に決着が着くのは Scott-Russel の観察から 61 年後の 1895 年です．オランダの Korteweg と de Vries は浅い水の波 (波の波長に比べて底が十分浅いような状況での波) の理論を提出し，波の振幅が本質的に次の偏微分方程式で記述されることを示しました．現在のこの方程式は Korteweg-de Vries (KdV) 方程式と呼ばれています．いきなり難しく見える数式を出して恐縮ですが，雰囲気を感じていただくために具体的な形を書いてみます．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3c_0}{2h} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

ここで， $u$  は空間座標  $x$ ，時刻  $t$  の 2 変数の未知関数で， $(x, t)$  における平均水面からの水の高さを表します．また， $h$  は平均水面の高さ (定数)， $c_0 = \sqrt{gh}$  ( $g$  は重力加速度) です．さらに， $\frac{\partial u}{\partial x}$  などは  $x$  で偏微分せよ，という記号で，関数  $u(x, t)$  で  $t$  を一定に保ち (定数だと思って)， $x$  で微分したものです．従って， $x$  方向の変化率 (接線の傾き) を表すと考えていただいて結構です．

<sup>1</sup>Doppler 効果 (音の高さが音源との相対速度によって変わるという効果) を初めて実験的に観測したという業績でも知られています．

以後、適当に  $x$  や  $t$  の尺度を変更し、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2)$$

としたものを KdV 方程式と言うこともあります。もし、(1) もしくは (2) 式を満足する関数  $u$  が求まれば、この方程式で記述される波動の挙動が完全にわかることになります。そのような関数を KdV 方程式の解と呼び、解を求めることを偏微分方程式を解くと言います。このように、挙動を知りたい関数に対する方程式を立てそれを解くことは、数学、理論物理学に限らず、広い意味での数理学での常套手段です。

Korteweg と de Vries はこの方程式を満足する関数を実際に構成し、その関数が記述する波が Scott-Russel の見た孤立波であると考えられることを、実験値との比較によって示したのです。

しかしながら、何故か Korteweg と de Vries の研究は歴史の波にのまれて忘れ去られます。このような波動現象の重要性が理解されるには時代が早すぎたのかも知れません。現在、KdV 方程式は、大抵の数学者、理論物理学者、また波動に関係する工学研究者の間で大変著名な方程式となっています。しかし、そうなるためには時間が必要でした。

## 1.2 Fermi-Pasta-Ulam, Zabusky-Kruskal

Korteweg, de Vries の論文から約 60 年後、全く違う文脈で KdV 方程式が再発見されました。1950 年代、原子核物理で著名な Fermi は当時アメリカのロスアラモス研究所にあった MANIAC I という電子計算機を用いて、理論的計算ではうまく解けない物理学の重要な問題に取り組みました。その中で、統計力学と呼ばれる分野の基本問題に関係する、1 次元の熱伝導の問題が扱われました。もう少し具体的に述べましょう。熱はミクロに見ると物質を構成している原子・分子の振動だと解釈できます。そのような振動を記述する最も簡単なモデルとして、Hooke の法則に従うバネ (中学の理科で学ぶ、バネの力が自然長からの伸びに比例するバネ) でお互いつながれた質点のモデルが考えられます。しかし、これではモデルが単純すぎて熱伝導現象をうまく記述できません。そこで、Fermi らはバネの力  $F$  が自然長からの伸び  $\Delta$  によって

$$F = -k(\Delta + \alpha\Delta^2), \quad k, \alpha \text{ は定数}$$

と書かれる「非線形の」バネでつながれた格子を考え、その系がどのように時間発展していくかを数値的に調べたのです。彼らは、ある初期状態から出発して時間が経つとさまざまな周波数の振動がどんどん現れてくると予想したのですが、得られた結果は予想外のもので、何とある時間が経つとシステムは元の初期状態に戻ってしまったのです。この実験は Fermi-Pasta-Ulam の数値実験と呼ばれています。

この実験に興味をもった Zabusky と Kruskal はそのシステムが近似的に KdV 方程式 (1) で記述されることを見出し、KdV 方程式をコンピュータで解析しました (1965 年)。その結果、Fermi-Pasta-Ulam の数値実験と同様の結果が再現できたのですが、同時に、彼らは以下のような不思議な現象を発見しました。

- ⇒ 初期値を正弦波にとると、波形はだんだん崩れ、いくつかのパルス状の孤立波に分裂する。
- ⇒ それらの孤立波は速度・形を変えず安定に伝播し、振幅の大きなパルスほど幅が狭く、また速度も速い。
- ⇒ 孤立波が別の孤立波を追い抜いても、それぞれの孤立波は振幅、速度とも変化しない。つまり、孤立波は粒子的な性質を持つ。

ここで観察された粒子的な性質を兼ね備えた安定な孤立波を、Zabusky-Kruskal はソリトンと名付けました。英語で孤立波を solitary wave と言いますので、solitary と、素粒子などの名前によく使われる「粒子」の意味を持つギリシャ語の接尾辞 -on を合成して soliton というわけです<sup>2</sup>。

<sup>2</sup>本来は solitary + on で solitron となるはずだったのですが、solitron は既に商標 (会社名) として使われていたので soliton にした、とのこと。

### 1.3 不思議な波ソリトン

ここで、実際にソリトンとはどのような波なのかを見てみましょう。例えば、KdV 方程式 (2) のソリトンを記述する厳密な解は

$$u(x, t) = 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t + \delta), \quad \kappa, \delta: \text{定数} \quad (3)$$

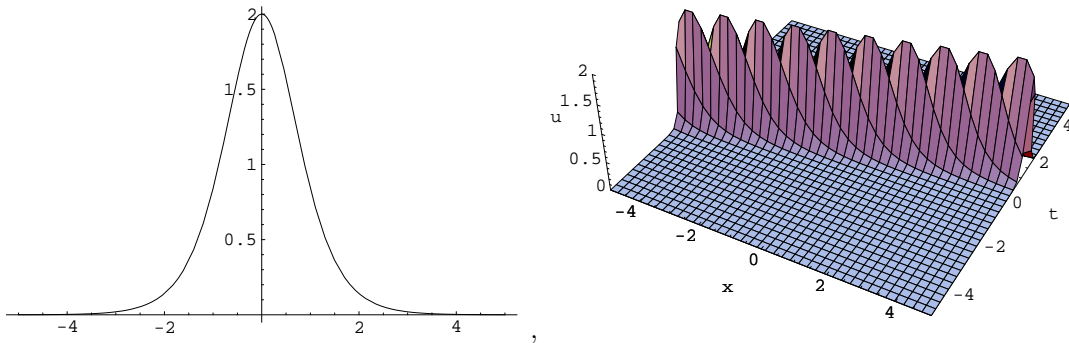
と与えられます。ここで、 $\operatorname{sech}$  というのは双曲線関数と総称される関数の一つで、指数関数を用いて

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

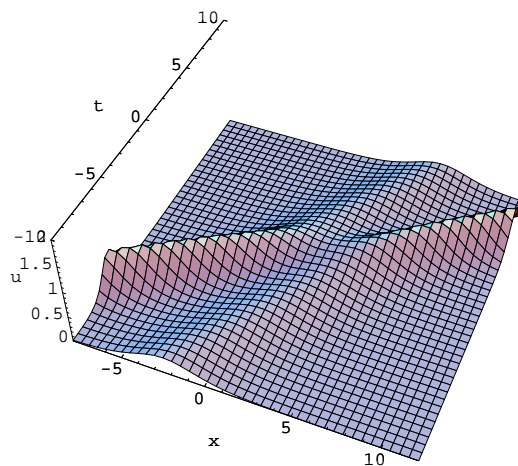
で定義される、三角関数のオトモダチです。双曲線関数の仲間には

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

などがあり、ソリトンは大抵これらの関数を用いて表示されます。(3) は振幅  $2\kappa^2$ 、速度  $4\kappa^2$  で右に動く孤立波を表します。



すぐ後で述べるように、任意の  $N$  個のソリトンの相互作用を記述する解 ( $N$ -ソリトン解) が厳密に求まるのですが、下の絵は 2-ソリトン解を描いたものです。



この絵からも次のことが観察できると思います。

☞ 「ソリトン」の名前の通り、各々のパルスは安定に伝播し、衝突した後も速度、振幅を全く変えません。

- ⇒ しかし「2-ソリトン解」は、単に二つのソリトンを重ね合わせたものではありません。実際に衝突が終わった後各々のソリトンはその位置がずれています。これは、ソリトンが実際に「相互作用」している証拠です。この現象を位相のずれ (phase shift) と呼びます。

波というのは普通、伝播しながら減衰したり崩れたりします。また、衝突するとさざ波が発生したり、そのまま崩れてしまったりします。ソリトンはそのようなことが全くない、粒子的な波なのです。そんなものが現実存在しているなんて、不思議だと思いませんか？

## 1.4 大ブレーク!

こうして KdV 方程式で記述される波としてソリトンが発見されたわけですが、KdV 方程式を数学的に解析していく上で、保存量が重要であるとの認識がありました。物理現象の解析でも、運動量、エネルギー、角運動量などの保存量はとても重要です (高校物理では保存量だけを使って質点の運動を議論するくらいですね)。KdV 方程式の場合でも、関数  $u(x, t)$  が KdV 方程式を満足するならば、 $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)^2 dx$  は時間  $t$  に依らずに一定値を取ることを簡単に示すことができます。Miura<sup>3</sup> は手計算で KdV 方程式 (2) の保存量を 13 個求め<sup>4</sup>、最終的に保存量が無限個 (!) あることを示しました。

このような地道な努力の末、Gardner, Greene, Kruskal, Miura による大発見が生まれました。それは次のようなものです。

- ⇒ KdV 方程式の初期値問題 ( $t = 0$  で初期波形  $u(x, 0)$  を与えて、任意の時刻  $t$  での  $u(x, t)$  を求める問題) は厳密に解ける。
- ⇒ 任意の  $N$  個のソリトンの相互作用を記述する厳密な解が KdV 方程式に存在する。それらは指数関数を用いて表される。

偏微分方程式は解析が大変難しく、厳密に解けることはまずありません (だからコンピュータを用いて数値的に解析するのです) ので、KdV 方程式という特殊な方程式のみが対象であったにせよ、これは本当に画時代的な発見です。GGKM の開発した方法は、現在逆散乱法と呼ばれています。また、 $N$  個のソリトンが相互作用する厳密な解を  $N$ -ソリトン解と呼びます。

いったん厳密解法が見つかってしまうと、その方法を発展させ、さまざまな方程式が同様の解法で解けるということがわかってきました。その後 10 年ほどの理論の発展は爆発的で、百を超える偏微分方程式が KdV 方程式の仲間であり、ソリトンを記述し、かつ厳密に解けるということがわかりました。まさに大ブレークです。それらの方程式はソリトン方程式と呼ばれます。

さて、その時、日本ではどのような状況だったのでしょうか。1967 年、戸田盛和は格子振動の問題を考察する中で、次のような「おもちゃ」を考案しました。それは、Fermi-Pasta-Ulam の数値実験で扱われたような一次元格子で、バネの力  $F$  が自然長からの伸び  $\Delta$  に対して

$$F = a(e^{-b\Delta} - 1), \quad a, b \text{ は正の定数}$$

と書けるようなバネでつながれています。戸田はこの系が楕円関数 ( $\sin, \cos$  などの拡張で、19 世紀に盛んに研究された関数です) で記述される厳密な解を持つことを示しました<sup>5</sup>。物理的には、このようなバネは  $\Delta$  が大きいと Hooke の法則に従うバネとほぼ同等で、 $\Delta < 0$  では剛体球と同等の振舞いをします。この格子系を現在戸田格子と呼びます。戸田格子は通常の Newton 力学で記述される系ですから、Newton の運動の法則に従って系を統括する運動方程式を

<sup>3</sup>日本人ばい名前ですが、実は日系アメリカ人です。

<sup>4</sup>一言で 13 個と言いますが、実際にやってみるとすさまじい計算量であることがわかります。凡人にはなかなかそこまでやる気が起こりません。

<sup>5</sup>本当は逆で、戸田は楕円関数で解が書けるような 1 次元格子系を考えていてこの格子系に至ったとのこと。

書き下すことができます。それは、 $x_n$  を  $n$  番目の質点の変位、質点の質量を  $m$ 、 $t$  を時間とすると、

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = a \left\{ e^{-b(x_n - x_{n-1})} - e^{-b(x_{n+1} - x_n)} \right\} \quad (4)$$

と表せます。この方程式を(次元) 戸田格子方程式と呼びます。戸田は戸田格子方程式のソリトン解を実際に求め、戸田格子方程式も KdV 方程式と同じ、ソリトン方程式であることを示しました。その後、戸田格子は、19 世紀に概念が確立された完全積分可能系と呼ばれる極めて性質がよい系であることがわかり、同時に KdV 方程式と同様、初期値問題の厳密な解法が与えられました。

戸田格子のような格子系は抵抗、コンデンサ、コイルを用いた簡単な電気回路で実現することができます。当時 RCA の研究所に在籍していた広田良吾は「ソリトンは暗号に使える」というアイデアから戸田格子に注目し、電気回路で実際にソリトンを走らせる実験に成功しました(1970)。これがきっかけになって、広田良吾は後に「広田の方法」で知られる、ソリトン方程式の驚くべき解法を開発することになります。日本ではこのように物理学者を中心にソリトンの研究が始まっていきます。

## 1.5 ソリトンは何故不思議?

数学的な立場から見たとき、ソリトン方程式は「非線形のくせに厳密に解けてしまう」という特徴を持っています。これは数学者や物理学者からすると驚くべきことです。ここで、「非線形」という言葉について簡単に説明しておきましょう。微分という演算を考えます。微分の定義から、 $x$  の関数  $f(x)$ 、 $g(x)$  に対して、

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = a \frac{df(x)}{dx} + b \frac{dg(x)}{dx}$$

が直ちに従います。また、高階の微分(微分を何度か繰り返すこと)についても同様ですし、「偏」微分でも全く同じです。この性質を微分の線形性と呼びます。さて、与えられた微分方程式が、従属変数とその微分の 1 次式からなっているものとし、このような方程式を線形微分方程式と呼びます。例えば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (5)$$

(これは KdV 方程式(2) から  $6u \frac{\partial u}{\partial x}$  の項を取り去ったものです)はその例です。今、 $x, t$  の関数  $u_1, u_2$  が(5)を満たすものとし、微分の線形性から  $a, b$  を定数として  $au_1 + bu_2$  も(5)を満たすことがわかります。つまり、線形微分方程式も微分と同様、線形性を持っています。KdV 方程式(2)は 1 次式でない項  $6u \frac{\partial u}{\partial x}$  が悪さをして、この性質が成り立ちません。線形でない微分方程式を非線形微分方程式と呼びます。

実は、線形微分方程式については既に解析の方法が確立されており<sup>6</sup>、そこでは線形性が根本的な部分で使われています。解析法の一つであるフーリエ解析の概略を方程式(5)を例にとり説明しましょう。sin, cos の微分ルール

$$\frac{d}{dx} \sin kx = k \cos kx, \quad \frac{d}{dx} \cos kx = -k \sin kx$$

と合成関数の微分ルールを知っていると、

$$\frac{\partial \sin(kx + k^3t)}{\partial t} = k^3 \cos(kx + k^3t), \quad \frac{\partial^3 \sin(kx + k^3t)}{\partial x^3} = -k^3 \cos(kx + k^3t) \rightarrow \frac{\partial \sin(kx + k^3t)}{\partial t} + \frac{\partial^3 \sin(kx + k^3t)}{\partial x^3} = 0$$

となりますから、 $\sin(kx + k^3t)$  は(5)を満たします。 $\cos(kx + k^3t)$  も同様です。ここで、(5)には線形性がありますから、これら二つから新しい関数  $a \sin(kx + k^3t) + b \cos(kx + k^3t)$  を作っても(5)を満たします。さらには、 $k$  は何でもいっわけですから、 $k$  をいろいろ変えながら和を取っても(5)を満たします。 $k$  は連続的に変わりますから、実際には和は「連続的な足し算」である積分になります。かくして、

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (a(k) \sin(kx + k^3t) + b(k) \cos(kx + k^3t)) dk \quad (6)$$

<sup>6</sup>と言ったら怒られるかも知れません。ただ、病的でない条件の場合、解法は大学 2,3 年生で学びます。

という関数が (5) を満たすことがわかりました。実は、これでもう十分なのです。例えば、 $u(x, t)$  の  $t = 0$  での関数形を与えておいて、それがどのように発展するかを考えます (初期値問題)。例えば、 $u(x, 0) = f(x)$  だったとしますと、

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (a(k) \sin kx + b(k) \cos kx) dk = f(x)$$

を満足するように  $a(k), b(k)$  を決められるか? という問題になります。実は、この問題に対しては完全な解答があります。それが 19 世紀にフーリエが開発した方法で、答だけ書きますと、

$$a(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx, \quad b(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx$$

となります。これで与えられた  $f(x)$  に対して  $a(k), b(k)$  を計算でき、それから  $u(x, t)$  が分かります。このようにして (5) の初期値問題が完全に解けるのです。

もうお分かりでしょうが、この解法では線形性が根本的に効いています。従って、KdV 方程式のような非線形微分方程式に対しては全くのお手上げになってしまいます。もちろん、方程式を満足する関数を具体的に書き下すことなどは絶望的です。それなのに、ああそれなのに、ソリトン方程式は解けてしまうのです!

また、上の解析から、なぜ 19 世紀に孤立波などあり得ない、という議論がなされたかもはっきりします。初期値  $f(x)$  にパルス状の関数を与えたとします。もちろんそれでも  $a(k), b(k)$  は決定でき、初期値問題を解くことはできます。このとき、 $u(x, t)$  は (6) で表わされますが、この関数は波長が  $\frac{2\pi}{k}$  で、速度が  $k^2$  で進む正弦波の足し算だということに注意します。各正弦波の速度は波長に依存しますから、それらは波長に応じて勝手な速さで進んでしまい、初期にパルス上の関数を与えても時間が経つと崩れてしまいます。従って、(5) では安定に伝播する孤立波を記述する解は存在し得ないのです。波の速度が波長によって変わってくる現象は、物理学では分散と呼ばれ、波動現象では極めて一般的に見られます<sup>7</sup>。このような理由で、孤立波という現象自体が波動理論の中で異常なものなのです。

## 2 ソリトンのからくり

ソリトン方程式が非線形のくせに「解けてしまう」方程式だということを説明しました。本来解けないはずのものが解けてしまうのですから、裏には何かからくりがあるはずですが、それを求めて、1970 年代から 1980 年代初頭まで数学者・物理学者が競うようにして、ありとあらゆる方向から研究をしました。結局この宝を掘り当てたのは、広田良吾、また「佐藤超函数論」で有名な数学者の佐藤幹夫とそのグループでした。彼らの見出した結論の一つを思い切り簡潔に述べると

### ソリトン方程式は行列式の恒等式である

となるかと思えます。「行列式」は高校で学ぶように、連立一次方程式の解に現れるものです。微分方程式と連立一次方程式は全く違うものに見えますが、この事実は、ソリトン方程式という非線形微分方程式の奥深くに連立一次方程式の世界が隠れている、ということの意味します。今回の講義ではそこまで立ち入ることはできませんが、その一端を見せてくれるのが、広田良吾によって発見されたソリトン方程式の魔法のような解析法です。

#### 2.1 広田マジック

広田良吾は「ソリトンは暗号に利用できる」という信念を持って研究をしているうちに、戸田格子方程式の 3-ソリトン解を厳密に求める必要に迫られました。その試みの中で、彼は現在広田の方法と呼ばれる、 $N$ -ソリトン解をまさに魔法のように簡単に求める方法を見つめました。後の都合上、戸田格子方程式ではなく、2次元戸田格子方程式と呼ばれる次のような方程式

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} = e^{-(u_n - u_{n-1})} - e^{-(u_{n+1} - u_n)} \quad (7)$$

<sup>7</sup>光がガラスやプリズムを通過すると色が分かれて見えますが、これも「分散」のためです。

で説明します。(4) との違いは、左辺の時間に関する 2 階微分を  $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}$  で置き換えたことだけです (簡単のため,  $m = a = b = 1$  とおいています). また, 新しい変数  $r_n$  を  $r_n = u_n - u_{n-1}$  で導入すると,

$$\frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n+1}} - e^{-r_{n-1}} \quad (8)$$

とも書けます. 広田の方法の第 1 ステップは, うまい従属変数変換を見つけて, 方程式を双線形形式という形式に書き直すことです. 右辺と左辺をじ〜っとにらんで, 次のような新しい変数  $\tau_n(x, y)$  を導入します.

$$e^{-r_n} = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \text{ もしくは } r_n = -\log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \quad (9)$$

これを (8) に代入します. ここで, 微分の計算ルール

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_y}{f} \right) = \frac{f_{xy}f - f_x f_y}{f^2}$$

に注意します. また, これ以降, 偏微分記号が煩雑となるので, 右下についた添字はそれについての微分を表すことにします. 例えば,  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  などです. 少し計算して整理すると,

$$2F_n - F_{n+1} - F_{n-1} = 2 \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} - \frac{\tau_{n+2}\tau_n}{\tau_{n+1}^2} - \frac{\tau_n\tau_{n-2}}{\tau_{n-1}^2}, \quad F_n = \frac{\tau_n \text{ } xy \tau_n - \tau_n \text{ } x \tau_n \text{ } y}{\tau_n^2}$$

となりますが, これが全ての  $n$  について成り立つので,  $\tau_n$  とその微分に対する 2 次の方程式

$$\tau_n \text{ } xy \tau_n - \tau_n \text{ } x \tau_n \text{ } y = \tau_{n+1}\tau_{n-1} + (\alpha(x, y)n + \beta(x, y))\tau_n^2 \quad (10)$$

が得られます. ここで,  $\alpha, \beta$  は任意関数です. 逆に, もしこの方程式を満足する  $\tau_n$  を見つけることができれば, (9) によって  $r_n$  が求まります. このような計算をさまざまな方程式に対して行くと, (10) の左辺のような特徴ある微分演算がたくさん出てきます. 広田の独創的なところは, この特徴ある演算を表す演算子を定義して, その性質を徹底的に調べ, 公式を作り, 計算マニュアルを作ってしまったところです. 引数として二つの関数  $f, g$  を取り, それらから一つの関数を与える微分演算子  $D_x, D_y$  などを次のように定義します.

$$D_x^m D_y^n f \cdot g = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^n f(x, y)g(x', y') \Big|_{x=x', y=y'} \quad (11)$$

いきなり包括的な定義を書くと戸惑うかも知れませんが, これに従って簡単な場合を計算してみると,

$$D_x f \cdot g = f_x g - f g_x, \quad D_x^2 f \cdot g = f_{xx} g - 2f_x g_x + f g_{xx}, \quad D_x D_y f \cdot g = f_{xy} g - f_x g_y - f_y g_x + f g_{xy}$$

となります. どこかで似たようなものを見たことはありませんか? そう, 微分を学んだことがある人なら, 積の微分法 (Leibnitz ルール)

$$(fg)' = f'g + fg', \quad (fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

を知っているでしょう. 上の演算はちょうど積の微分法に適当に符号をつけたものになっています. 微分演算子  $D$  は広田微分と呼ばれます. 広田微分を使って (10) は

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} + (\alpha(x, y)n + \beta(x, y))\tau_n^2 \quad (12)$$

と書かれます. このような形の方程式を (広田の) 双線形形式と呼びます.

2 次元戸田格子方程式 (8) で  $r_n = 0$  という関数は自明な解です. 対応して,  $\tau_n = 1$  は双線形形式 (12) の解であって欲しいです. (12) に  $\tau_n = 1$  を代入すると,  $\alpha(x, y) = 0, \beta(x, y) = -1$  であればよいことがわかります. そこで, 広田の方法では,  $\tau_n$  を

$$\tau_n = 1 + \varepsilon f_n^{(1)} + \varepsilon^2 f_n^{(2)} + \varepsilon^3 f_n^{(3)} + \dots \quad (13)$$

と仮定して、(12) に代入します．そして、 $\varepsilon$  の各べきで揃え、その係数が 0 ということから  $f_n^{(k)}$  に関する方程式 (元の方程式より簡単になっている) を導出し、下の方から次々と解いていきます．適当なところでやめ、 $\varepsilon$  は小さいとしておけば、「 $\tau_n = 1$  からのずれが小さいと仮定したときの近似的な解だ」と主張できるわけです．このような解析法を摂動法と呼び、特に物理学でよく使われます．

ところが、またまた不思議が起こります．摂動法では途中で「無理やり」やめないといけないのに、 $f_n^{(1)}$  として簡単な  $e^{px+qy+r_n}$  という型の関数を仮定して解いていくと、途中で自然に級数が切れてしまうのです (ある  $k$  から先の  $f_n^{(k)}$  が全て 0 になってしまう)．具体的な計算も簡単なものですので、講義の際にお見せします．計算の結果、 $\tau_n$  として、

$$\tau_n = 1 + \varepsilon e^{\eta_1} \quad (14)$$

$$\tau_n = 1 + \varepsilon (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + \varepsilon^2 A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} \quad (15)$$

ただし、

$$\eta_i = P_i x + Q_i y + R_i n + \delta_i, \quad P_i Q_i = 4 \sinh^2 \frac{R_i}{2}, \quad A_{12} = \frac{(P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2) - 4 \sinh^2 \frac{R_1 - R_2}{2}}{(P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2) - 4 \sinh^2 \frac{R_1 + R_2}{2}}$$

などが得られます．これらを (9) に代入すると、2次元戸田格子方程式のそれぞれ 1-ソリトン解、2-ソリトン解になっているのです．

広田はこの方法を駆使して、各個撃破的にたくさんのソリトン方程式の解を求めたり、また新しいソリトン方程式を構成して見せたり、ソリトン方程式の解の変換理論を作ったりして、爆発的に研究を進めていきます．どうやら、広田自身には「双線形形式こそがソリトン方程式の本質だ」という、極めて先駆的な確信があったようです．しかしながら、この方法はあまりにも独創的すぎて、ソリトンの研究者の間でも十分な評価がされたとは言いがたかったようです．

そして 1981 年、広田の確信がソリトン方程式の根本を突いていることに気が付いたのは、同じく独創的な数学者として名を知られていた佐藤幹夫でした．

## 2.2 Plücker 関係式

佐藤幹夫が構築した壮大なソリトンの統一理論は現在佐藤理論や KP 理論と呼ばれています．佐藤理論の結論を一言で書くならば、

**ソリトン方程式の解全体の作る空間は普遍グラスマン多様体である**

この結論は

**双線形形式は行列式の恒等式である**

ことから従うものです．もう少し正確に述べると、普遍グラスマン多様体と呼ばれる空間<sup>8</sup>には座標系があります．座標は行列式で表示され、それらの間には Plücker 関係式と呼ばれる 2 次の関係式が成り立ちます．佐藤幹夫はソリトン解などの厳密解が行列式で書けることに注目し、そのときの双線形形式が Plücker 関係式に他ならないことを見出し、上の結論に至ったのです．

もちろん、佐藤理論そのものを講義で説明することはできませんが、その代りに Plücker 関係式とはどのような関係式か、また双線形形式 (12) がなぜその関係式に帰着されるかを説明します．

まず鍵となるのは、2-ソリトン解 (15) が次の  $2 \times 2$  行列式による表示と等価なことです (詳しくは講義で説明します)．

$$\tau_n = \begin{vmatrix} p_1^n e^{\eta_1} + q_1^n e^{\xi_1} & p_1^{n+1} e^{\eta_1} + q_1^{n+1} e^{\xi_1} \\ p_2^n e^{\eta_2} + q_2^n e^{\xi_2} & p_2^{n+1} e^{\eta_2} + q_2^{n+1} e^{\xi_2} \end{vmatrix}, \quad \eta_i = p_i x - \frac{1}{p_i} y + \delta_{i0}, \quad \xi_i = q_i x - \frac{1}{q_i} y + \delta_{i1}. \quad (16)$$

<sup>8</sup>実は、普遍グラスマン多様体は既に世にあったわけではなく、ソリトン方程式の理論の枠組みを与えるものとして、佐藤幹夫が新しく作り出した空間です．



ここで、第2列は第1列で  $n \rightarrow n+1$  にしたものであること、また、第1列の要素、例えば  $p_1^n e^{\eta_1} + q_1^n e^{\xi_1}$  を  $f_n^{(1)}(x, y)$  とおくと、それは簡単な線形の関係式

$$\frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(1)}, \quad \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(1)}, \quad (17)$$

を満足していることに注意します。つまり、 $x$  で微分したら右側と同じ、 $y$  で微分したら左側と同じ（正確には (-1) 倍）、という構造が行列式に入っているのです。こんなきれいな構造があるのですから、これを一般の  $N \times N$  行列式に拡張したくなるのは自然です。

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(k)}, \quad \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(k)} \quad (18)$$

実は、これも双線形形式 (12) を満足するのです。そして、この行列式を (12) に代入したとき、双線形形式は行列式の2次の恒等式に帰着し、その恒等式が Plücker 関係式と呼ばれるものです。行列式の一般的な微分ルールと上の線形関係式を使うと、双線形形式の各項はやはり行列式で書けて、ほとんどの要素が元の  $\tau_n$  と同じ、端の列だけが微妙にずれている行列式になります。具体的な計算も難しいものではないので講義でやって見せますが、結論だけを書いておきます。行列式の列だけが問題ですので、次のような略記法を使いましょう。

$$\tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} = |0, 1, \dots, N-1| \quad (19)$$

すると、(12) は

$$\begin{aligned} & |-1, 0, 1, \dots, N-2, | \times |1, \dots, N-2, N-1, N| \\ - & |-1, 1, \dots, N-2, N-1| \times |0, 1, \dots, N-2, N| \\ + & |-1, 1, \dots, N-2, N| \times |0, 1, \dots, N-2, N-1, N| = 0 \end{aligned}$$

という式に帰着されます。ただし、太字の部分は全ての行列式で共通の部分です。面倒なので、共通の部分も省いてしまっ、次のような絵で表してしましましょう（以下の箱に玉が入った図形は Maya 図形と呼ばれます）。

$$\begin{aligned} & \begin{array}{cccc} -1 & 0 & N-1 & N \\ \bullet & \bullet & \square & \square \end{array} \times \begin{array}{cccc} -1 & 0 & N-1 & N \\ \square & \square & \bullet & \bullet \end{array} \\ - & \begin{array}{cccc} \bullet & \square & \bullet & \square \end{array} \times \begin{array}{cccc} \bullet & \square & \square & \bullet \end{array} \\ + & \begin{array}{cccc} \bullet & \square & \square & \bullet \end{array} \times \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \square & \square \end{array} = 0 \end{aligned}$$

これが恒等式であることは、大学1年前期で学ぶ線形代数学の知識で証明できます。また、これと類似の恒等式は無限個存在することが知られており、それらを Plücker 関係式といいます。

結局、知られているほとんどのソリトン方程式は Plücker 関係式に帰着されます。むしろ、Plücker 関係式が先にあり、現れる行列式に (17) のような内部構造を入れるとそれが双線形形式になり、さらに (9) のような従属変数変換で得られるのがソリトン方程式なのだ、という理解もできるかと思います。これが、少なくとも私が理解している「ソリトンのからくり」で、佐藤理論の骨格部分だと考えています<sup>9</sup>。

<sup>9</sup>実は、その奥にはさらに根源的な「無限次元の空間に無限個の対称性があり、対称性のおかげで人間がうまく扱える無限となる」という壮大なからくりがあるのですが、ここで解説できないのが残念です。

### 3 ソリトンが運んできた数学

佐藤理論は多くの研究者が追い求めていた「からくり」を一挙に明らかにしました<sup>10</sup>。1981年に佐藤理論が発表された後は、研究者たちは別の研究に移り、ちょうど大騒ぎした祭りの後のような状況だったということです。文献 [7] の冒頭の対談では、ちょうどその頃大学院生だった方が「気がつくと周りには誰もいない感じがしたものです」と発言されています。しかし、文献 [7] は 1997 年に出版されており、タイトルも「ひろがる可積分系の世界」(可積分系とはソリトン方程式のような意味で解ける方程式を言います) です。実は、「ソリトンのからくり」はさまざまな新しい数学を内包していたのです。Scott-Russel の見たソリトンは、どっこい、さまざまな分野と関わりながらまだ走り続けています。ソリトンは相互作用に対して安定なのですから!

以下、ソリトンが運んできた新しい数学の一端を紹介します。それは、「連続と離散」に関わるものです。

#### 3.1 連続と離散のギャップ: logistic 方程式

ロジスティック (logistic) 方程式と呼ばれる簡単な常微分方程式<sup>11</sup>を考えます。

$$\frac{du}{dt} = au(1-u), \quad a > 0 \quad (20)$$

あまり標準的な方法ではないかも知れませんが、この方程式を解いてみましょう。(20) の両辺を  $-u^2$  で割ります。簡単な変形で、

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -a \left(1 - \frac{1}{u}\right) \implies \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{1}{u}\right) = -a \left(1 - \frac{1}{u}\right) \implies \frac{dv}{dt} = -av, \quad v = 1 - \frac{1}{u}$$

となります。これから直ちに

$$v = Ce^{-at} \implies u = \frac{1}{1 - Ce^{-at}} \quad C: \text{任意定数}$$

となり、めでたく解けました。例えば初期値として  $u(0) = u_0$  を与えておけば、 $C = \frac{u_0 - 1}{u_0}$  となるので、これで  $u$  の値は完全に決まります。これは  $u_0$  を出発点とし、 $t$  が大きくなるとだんだん 1 に近づくような関数です。

さて、logistic 方程式をコンピュータでシミュレーションするときにはどのようにするのでしょうか? さまざまな方法がありますが、ここでは差分法を取り上げます。まず、基本的な事実ですが、コンピュータは有限桁の数しか扱えませんので、実数のような連続量を取り扱うことができません。従って、極限の概念を知りません。つまり、何らかの意味で  $t$  を離散化しないとコンピュータシミュレーションはできないのです。まず困るのは微分をどう扱うかですが、差分法で基本となるのは次のような考え方です。微分の定義から

$$\frac{du}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \sim \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \quad (21)$$

ですので、 $h$  が小さいならば、一番右の量は微分のよい近似となっているはずですが ( $\sim$  は「ほぼ同じ」を表す記号です)。これを微分に対して差分、特に、先の時刻での値との差を取っていますので前進差分といいます。logistic 方程式 (20) の微分を前進差分で置き換えてしまって、

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = au_n(1 - u_n) \quad \text{または} \quad u_{n+1} = ah u_n(1 - u_n) + u_n \quad (22)$$

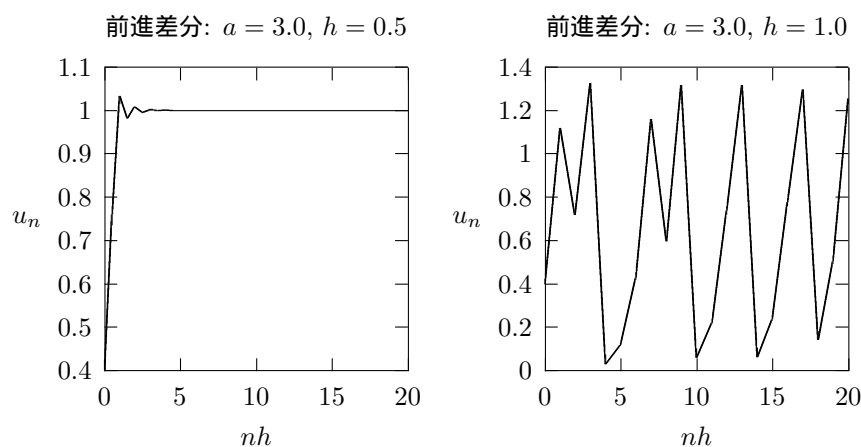
とすれば、( $h$  が小さい限り) よい近似になるはずですが。ここで、簡単のため、 $u(nh) = u_n$  と書きました。 $t = 0$  で  $u$  を与えておけば、この式を使って次々と  $t = nh$  における値が求まります。

(22) は高校 2 年で学ぶ漸化式の形をしています。これを方程式と見たときには差分方程式と呼びます。 $u_0$  を与え、コンピュータに次々と計算させれば  $u_n$  の値が得られます。ここで、作り方から明らかですが、(22) は  $h \rightarrow 0$  の極

<sup>10</sup>旧ソ連の研究者の一人は「大失敗だった、我々は今もっと広田の方法に注意するべきだった」と「敗戦の弁」を述べたそうです。

<sup>11</sup>この方程式は簡単な生態学モデルとも考えられるし、マーケティング理論などさまざまなところで応用される方程式です。一昔前までは高校 3 年の「数学 III」で解き方を習っていたんですが...

限で元の logistic 方程式に帰着することを注意しておきます．下に，(22) を使ってシミュレーションした結果を示します．



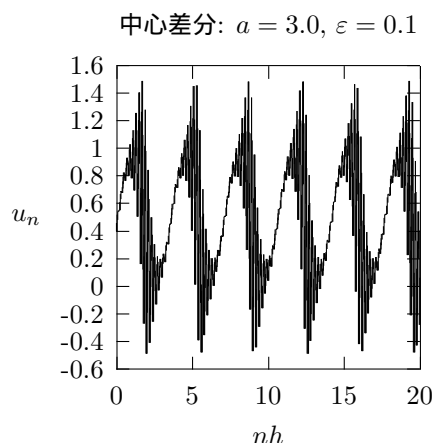
このように，メッシュ  $h$  が大きくなると，シミュレーションはガタガタです．何がいけないのでしょうか？ 差分の取り方，つまり，連続極限で微分になるようなものは他にもいろいろ考えられます．例えば，

$$\frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}$$

も  $h \rightarrow 0$  の極限で  $\frac{du}{dt}$  に帰着します（これは多分高校2年で微分を習うと練習問題でやるでしょう）．これを中心差分と呼びます．logistic 方程式 (20) の左辺を中心差分で置き換えると，次のような差分方程式（漸化式）が得られます．

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = au_n(1 - u_n)$$

これは対称性がよいので，よい結果が出るかも知れません．ところが，シミュレーションをしてみると次のようになります．



このように，激しい振動現象が現れてしまいます．さらに悪いことに，この振動は  $h$  をどんなに小さくしても現れることが知られています．連続極限で元の方程式に戻るからといって単純な離散化を行ってしまうと，元の方程式と全く異なる性質をもった差分方程式が得られてしまうのです．連続と離散の間には連続極限に隠れて根本的なギャップがあります．やみくもに離散化してもダメです．

では，元の方程式の解の挙動をうまく再現するような差分方程式は作れないのでしょうか？ この場合，実はうまく作れるのです．logistic 方程式を解いたときにわかりますが，この方程式の一つの特徴として，

logistic 方程式 (20) は変数変換  $v = 1 - \frac{1}{u}$  によって簡単な方程式  $\frac{dv}{dt} = -av$  に変換される  
 があります (ソリトン方程式に似てますね!)。この性質をうまく保存しながら差分方程式は作れないでしょうか? logistic  
 方程式そのものの代りに,  $\frac{dv}{dt} = -av$  の離散化をしてみましょう。どんな差分を取ってもいいのですが, ここでは後  
 退差分

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{h} = -av_n$$

を取ってみます。整理すると,

$$v_n = (1 + ah)^{-1}v_{n-1}$$

となり, これは公比  $(1 + ah)^{-1}$  の等比数列の漸化式ですから, この解は  $C$  を任意定数として  $v_n = C(1 + ah)^{-n}$  と  
 書けます。さてそこで, logistic 方程式と同じ変数変換

$$v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$$

をしてみましょう。すると, 簡単な計算の結果,

$$u_{n+1} = \frac{(1 + ah)u_n}{1 + ah u_n} \quad \text{または} \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = au_n(1 - u_{n+1}) \quad (23)$$

が得られます。もちろん,  $v_n$  が解けていますから,  $u_n$  も自動的に分かって,

$$u_n = \frac{1}{1 - v_n} = \frac{1}{1 - C(1 + ah)^{-n}}$$

となります。さらに, これも当然ですが, 漸化式 (23) を使ってシミュレーションすると,  $h$  がどんなに大きくてもガ  
 タガタにならず, 大人しく 1 に近づいていきます。つまり, (23) 式は logistic 方程式の

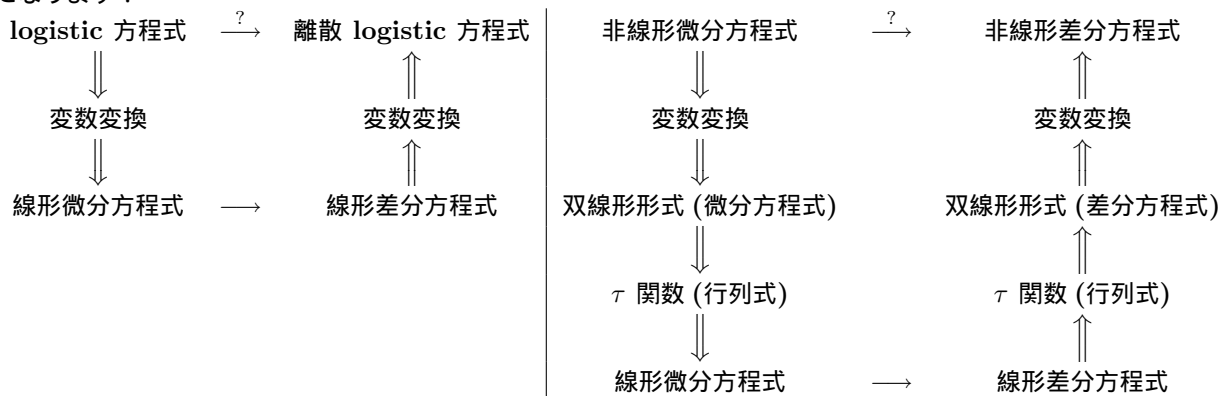
⇒ 解の大域的な構造 (要するに  $t$  が大きくなると 1 に漸近する)

⇒ 変数変換で簡単な方程式に帰着でき, 従って厳密に解けるという構造

を保存した, 「よい離散化」となっているわけです。(23) と (22) はほとんど同じで, たった一カ所, 右辺のカッコの  
 中の  $n$  が一個だけずれているだけです。このほんのわずかなずれが差分方程式では本質的なのです。

### 3.2 ソリトン方程式の「可積分性を保存した」離散化

上で指摘したように, logistic 方程式が解けるからくりとソリトン方程式が解けるからくりはよく似ています。違い  
 は, logistic 方程式が変数変換一発で線形常微分方程式になってしまったのに対し, ソリトン方程式の場合は変数変換  
 で双線形形式になり, 双線形形式の解として行列式が現れ, 行列式の中身に簡単な線形方程式が現れるというところ  
 です。しかし, 離散化で保存すべき構造は明らかです。まず, 解の中身の線形方程式を離散化し, 行列式の構造をそ  
 のまま使って双線形形式を作る。最後に変数変換して非線形のレベルに戻ればよい。この考え方を図にすると下のよ  
 うになります。



例えば，前にも触れた 2 次元戸田格子方程式の場合を考えます：

$$\begin{aligned}
 \text{方程式:} & \quad \frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n-1}} \\
 \text{変数変換} & \quad r_n = \log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \\
 \text{双線形形式} & \quad \frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2 \\
 \text{解} & \quad \tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)} & f_{n+1}^{(1)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)} \\ f_n^{(2)} & f_{n+1}^{(2)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)} & f_{n+1}^{(N)} & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x} = f_{n+1}^{(k)}, \quad \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial y} = -f_{n-1}^{(k)}
 \end{aligned}$$

これを上のスキームに従って離散化するには，例えば  $x, y$  をそれぞれ離散変数  $l, m$  に置き換え，行列式の要素が満たす関係式を単純に離散化して

$$\Delta_l f_n^{(k)}(l, m) := \frac{f_n^{(k)}(l+a, m) - f_n^{(k)}(l, m)}{a} = f_{n+1}^{(k)}(l, m), \quad \Delta_m f_n^{(k)}(l, m) := \frac{f_n^{(k)}(l, m+b) - f_n^{(k)}(l, m)}{b} = -f_{n-1}^{(k)}(l, m)$$

とすればよいのです．さらに，Plücker 関係式 (行列式の 2 次の恒等式) から双線形形式を作り，さらにうまい変数変換を見つけて非線形差分方程式を作ればよい．詳しくは (時間があれば) 講義で述べますが，ここでは結果だけ書いておきます (差分はよい記号がないので，慣れないと目がチラチラします) ．

$$\begin{aligned}
 \text{方程式:} & \quad \Delta_l \Delta_m R(l, m) = F_{n+1}(l+a, m) - F_n(l+a, m) - F_n(l, m+b) + F_{n-1}(l+a, m), \\
 & \quad \text{ただし } F_n(l, m) = \log \left( 1 + ab e^{R_n(l, m)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{変数変換:} \quad R_n(l, m) = \log \frac{\tau_{n+1}(l+a, m)\tau_{n-1}(l, m+b)}{\tau_n(l+a, m)\tau_n(l, m+b)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{双線形形式:} & \quad (\Delta_l \Delta_m \tau_n(l, m)) \tau_n(l, m) - \Delta_l \tau_n(l, m) \Delta_m \tau_n(l, m) \\
 & \quad = \tau_{n+1}(l+a, m)\tau_{n-1}(l, m+b) - \tau_n(l+a, m+b)\tau_n(l, m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解:} & \quad \tau_n = \begin{vmatrix} f_n^{(1)}(l, m) & f_{n+1}^{(1)}(l, m) & \cdots & f_{n+N-1}^{(1)}(l, m) \\ f_n^{(2)}(l, m) & f_{n+1}^{(2)}(l, m) & \cdots & f_{n+N-1}^{(2)}(l, m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n^{(N)}(l, m) & f_{n+1}^{(N)}(l, m) & \cdots & f_{n+N-1}^{(N)}(l, m) \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \Delta_l f_n^{(k)}(l, m) &= f_{n+1}^{(k)}(l, m), \\ \Delta_m f_n^{(k)}(l, m) &= -f_{n+1}^{(k)}(l, m) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

なお，2 次元戸田格子方程式は戸田格子方程式の拡張でした．逆に，2 次元戸田格子方程式の適当な制限をおけば，戸田格子方程式が得られ，同様の操作は差分方程式でも可能です．これも結果だけ書いておきますが，見た目も含めて大変よく似た形になります．

☞ 戸田格子方程式

$$\begin{aligned}
 \text{方程式:} & \quad \frac{d^2 r_n}{dt^2} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n-1}} \\
 \text{変数変換} & \quad r_n = \log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \\
 \text{双線形形式} & \quad \frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2
 \end{aligned}$$

☞ 離散時間戸田格子方程式

方程式:  $\frac{1}{\delta^2} [R_n(l + \delta) - 2R_n(l) + R_n(l - \delta)] = F_{n+1}(l) - 2F_n(l) + F_{n-1}(l)$   
 ただし,  $F_n(l) = \frac{1}{\delta^2} \log \left( 1 + \delta^2 e^{R_n(l)} \right)$

変数変換  $R_n(l) = \log \frac{\tau_{n+1}(l)\tau_{n-1}(l)}{\tau_n^2(l)}$

双線形形式  $\tau_n(l + 2a)\tau_n(l) - \tau_n(l + a)^2 = \tau_{n+1}(l)\tau_{n-1}(l) - \tau_n(l + a)\tau_n(l - a)$

このような「離散ソリトン系」は、実にさまざま分野に現れることが知られています。例えば理論物理学はもちろん、数理工学、数値解析（微分方程式の数値計算ではない）、また数学系では幾何学（微分幾何学に対して差分幾何学というべき分野が生まれつつあります）や代数学、そして「数学の女王」整数論まで関係するようになるとは...

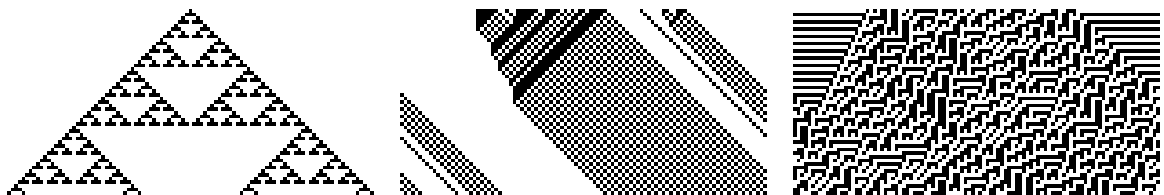
### 3.3 デジタルとアナログをつなぐ新しい数学: 「超離散」

自然界の基礎法則の多くは微分方程式の形で表現されます。しかし、自然界に現れる現象は非常に多様でかつ複雑です。それに比べると、我々の持っている数学はあまりにも少なく、現象が複雑であればあるほどシミュレーション自体も簡単ではありません。logistic 方程式のような本当に簡単な方程式でさえ、根本的な問題が出てくることは上に述べた通りです。そこで、セルオートマトンと呼ばれる極めて簡単なモデルが 1960 年代に提唱されました。基礎法則はとりあえず横におき、とにかく現象をシミュレートしよう、という考え方が有効な場合、微分方程式の代りによく使われます。セルオートマトンと呼ばれるシステムにはいろいろなバージョンがありますが、特にここでは Wolfram が系統的に研究した elementary cellular automaton(ECA) と呼ばれる 1 次元セルオートマトンについて簡単に説明します。

各位置における空間座標を  $n$ 、時間座標を  $t$  とし、状態は 0 と 1 しか取れないものとします。位置  $n$ 、時刻  $t$  での状態を  $u_n^t$  と表します。さらに、位置  $n$ 、時刻  $t + 1$  での状態  $u_n^{t+1}$  は近傍の値  $u_{n+1}^t, u_n^t, u_{n-1}^t$  だけで決まるものとします。従って、時間発展のルールは

$$u_n^{t+1} = F(u_{n-1}^t, u_n^t, u_{n+1}^t), \quad u_n \in \{0, 1\}$$

と書けます。右辺の組み合わせが  $2^3 = 8$  通りあり、その一つ一つに対して  $u_n^{t+1}$  に 0 か 1 を割り当てることができますので、このような発展ルールの数は  $2^8 = 256$  通りあります。Wolfram のやったことは、この 256 個のルールをコンピュータシミュレーションを使って徹底的に調べ上げたことです。その結果、現れる現象と微分方程式に見られる振舞いと類似性からそれらのルールを 3 通りに分類しました。例えば、以下の図は、左からルール 22, 184, 75 と呼ばれる ECA の時間発展を示したものです。横軸が  $n$ 、縦軸が（上から下へ） $t$ 、白いところが 0、黒いところが 1 です。



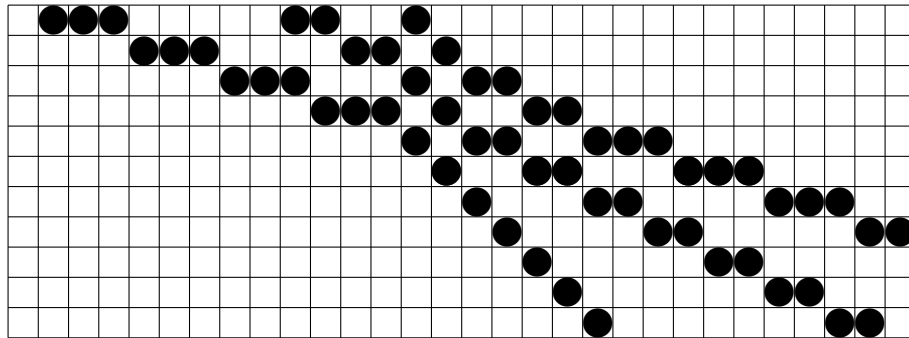
このようにセルオートマトンはさまざまな現象をシミュレートできるのですが、何故かソリトンを記述するものがありませんでした。そこで、高橋・薩摩は大変簡単なルールでソリトンを記述するオートマトンを作りました。それは次のようなものです。

### 高橋・薩摩の箱と玉の系 (Box and Ball System)

同じような大きさの玉を  $N$  個と、玉が一個だけ入る箱を無限個 (「十分たくさん」でよい) 用意して、箱を横 1 列に並べる。この箱の列に、全ての玉を任意に放り込んで、系の初期状態を作る。そして、系の時間発展ルールを次のように定める。

- ☞ 時刻  $t$  での状態が与えられているものとする。左の方の玉から順に、右側の最も近い空き箱に動かしていく。
- ☞ 全ての玉が 1 回ずつ動き終わった、時刻  $t$  を 1 増やして  $t+1$  とする。

この発展ルールによる系の時間発展の例を以下に挙げます。



この図からも明らかなように、連続した玉の集まりを一つの波とみなせば、それらはソリトンの特徴 (安定した孤立波として伝播・相互作用をしても個性は生き残る・phase shift がある) を全て持っています! 実際、高橋・薩摩らは上のルールに対して組み合わせ論的考察を行って、

- ☞ 箱と玉の系はソリトンだけから構成されること。
- ☞ 箱と玉の系は無数の保存量を持つこと。

を証明しました。ということは、この系は何らかの意味でソリトン方程式と関係するはずですが、しかし、一般に、セルオートマトンと (自然界の基礎法則を記述する) 微分方程式の間関係はわかっておらず、それがセルオートマトンの弱点とされていたのです。実際、Wolfram 自身、1985 年に出版された “Twenty Problems in the Theory of Cellular Automata” という論文でセルオートマトン理論で未解決の重要問題を 20 個提出しましたが、その中の第 9 問題に *What is the correspondence between cellular automata and continuous system?* という問題を挙げています。

高橋らはソリトン系と箱玉系の関係を探る試みの中で、次のようなことを見い出しました。

- ☞ 箱玉系の発展ルールは  $\max$  や  $\min$  と足し算、引き算からなっている漸化式 (差分方程式) で表示できる。例えば、オリジナルの箱玉系のルールは、 $u_n^t$  を時刻  $t$  における位置  $n$  の箱にある玉の個数 (0 か 1) とすると、

$$u_n^{t+1} = \min \left( 1 - u_n^t, \sum_{j=-\infty}^{n-1} (u_j^t - u_j^{t+1}) \right) = \min (\text{空き}, \text{移動可能な玉の数})$$

- ☞ 箱玉系はさまざまな拡張が可能。例えば、箱に入る玉の数を  $L$  個にするなど。

このような研究の中から決定的な結果が出てきました。鍵となったのは、次のような戸田型セルオートマトンと呼ばれる、次の方程式で表現されるオートマトンした。

$$u_n^{t+1} - 2u_n^t + u_n^{t-1} = G_{n+1}^t - 2G_n^t + G_{n-1}^t, \quad G_n^t = \max(0, u_n^t - L). \quad (24)$$

これと、離散時間戸田格子方程式

$$U_n^{t+1} - 2U_n^t + U_n^{t-1} = F_{n+1}^t - 2F_n^t + F_{n-1}^t, \quad F_n^t = \log(1 + \delta^2 e^{U_n^t}) \quad (25)$$

と比べて下さい。異なるのは右辺の  $F$  と  $G$  の違いだけです。結局、この二つを結び付けるのは、次のような極限の公式

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(1 + e^{\frac{x}{\varepsilon}}) &= \max(0, x) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{\frac{a}{\varepsilon}} + e^{\frac{b}{\varepsilon}} + \dots) &= \max(a, b, \dots) \end{aligned} \quad (26)$$

だったのです。実際、(25) において、 $U_n^t = \frac{u_n^t}{\varepsilon}$ 、 $\delta = e^{-L/(2\varepsilon)}$  において、 $\varepsilon \rightarrow +0$  の極限で (24) が得られます。さらに、方程式上の関係だけでなく、ソリトン解、保存量など、元の離散時間戸田格子方程式の持つ性質がそのまま極限で生き残ることもわかります。さらに、オリジナルの箱玉系は Lotka-Volterra 方程式と呼ばれるソリトン方程式から同様の手続きで得られることもわかりました。

結局、公式 (26) によって、箱玉系に代表されるソリトンセルオートマトンと離散ソリトン系が直接結び付くことになります。公式 (26) は系の性質を保ったまま状態量 (従属変数) を離散化する、つまりアナログ世界とデジタル世界を結ぶ鍵なのです。このような方法で状態量を離散化する手法は現在「超離散化」と呼ばれています。

世の中には、デジタル世界を記述する数学としてグラフ理論や組み合わせ論など、いわゆる「離散数学」として知られる数学があります。公式 (26) は、離散数学の世界と、Newton 以来膨大な積み重ねのある微分方程式の世界を結び付けている公式でもあるのです。そこから一体どのような数学とその応用が生まれてくるのでしょうか？

このようにソリトンという波は、我々に古い数学の価値を再認識させ、そして新しい数学を運んできてくれた、本当に不思議な波なのです。

## 参考文献

- [1] 寺本英, 広田良吾, 武者利光, 山口昌哉 著, 「物理と数学のはざまから」無限・カオス・ゆらぎ, 培風館, 1985 年。4 人の研究者の対談集ですが、実に興味深い内容です。図書館などで一度ご覧下さい。
- [2] 上野 喜三雄 著, 「ソリトンがひらく新しい数学」, 岩波科学ライブラリー 4, 岩波書店, 1993 年。佐藤幹夫の下で学んだ著者による, ソリトンの数学の物語。
- [3] 戸田 盛和 著, 「波動と非線形問題 30 講」, 物理 30 講シリーズ 3, 朝倉書店, 1995 年。「戸田格子」の発見者による, 上 2 冊よりは若干本格的な入門書。大学初年級向き。
- [4] 戸田 盛和 著, 「非線形波動とソリトン」[新版], 日本評論社, 2000 年。上と同様, 戸田格子の発見者自身による本格的な入門書。大学生から大学院生向き。
- [5] 和達 三樹 著, 「非線形波動」, 岩波講座現代の物理学 14, 岩波書店, 1992 年。本格的な勉強をしたい人のための入門書。大学院生向き。
- [6] 中村 佳正 編, 「可積分系の応用数理」, 裳華房, 2000 年。特に離散ソリトン方程式の応用に焦点を当てた (世界で類のない) 解説書。(一応 4 章の執筆をしているので宣伝も兼ねて...)
- [7] 「ひろがる可積分系の世界 - 戸田方程式の 30 年 -」, 「数理科学」1997 年 3 月号, サイエンス社。