DISDDG2010

Darboux 変換入門

– ２次元戸田格子を中心として –

ウィロックス ラルフ　（東京大学大学院数理科学研究科）

九州大学産業技術数理研究センター　ワークショップ

離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル

九州大学大学院数理学研究院　２０１０年2月２３日

Darboux 変換： $\boxed{\text{Bäcklund 変換に Lax 形式の変換を加えたもの}}$

G. Darboux の１８８９年に出版された本に初登場.

１９５０年代：Crum + Krein (Sturm-Liouville と Dirichlet 作用素関係で）再発見.

Darboux 変換：Bäcklund 変換に Lax 形式の変換を加えたもの

G. Darboux の１８８９年に出版された本に初登場.

１９５０年代：Crum + Krein (Sturm-Liouville と Dirichlet 作用素関係で）再発見.

- 幾何的な意味：（Darboux）conjugate nets の間の変換 $\longrightarrow$ 離散幾何学
- 代数的な意味：可積分系の特殊解を構築し, 解の代数的な構造を解明する.
- 解析的な意味：自己共役作用素のスペクトルに束縛状態を加える変換.

Darboux 変換：$\boxed{\text{Bäcklund 変換に Lax 形式の変換を加えたもの}}$

G. Darboux の１８８９年に出版された本に初登場.

１９５０年代：Crum + Krein (Sturm-Liouville と Dirichlet 作用素関係で）再発見.

- 幾何的な意味：（Darboux）conjugate nets の間の変換 $\longrightarrow$ 離散幾何学
- 代数的な意味：可積分系の特殊解を構築し, 解の代数的な構造を解明する.
- 解析的な意味：自己共役作用素のスペクトルに束縛状態を加える変換.

- ２次元戸田格子における Darboux 変換と binary Darboux 変換
- Darboux 変換から得られる可積分系の離散化
- 広田・三輪方程式における Darboux 変換と binary Darboux 変換
- 広田・三輪方程式の連続極限：KP 方程式とその 1+1 次元可積分系への簡約化

復習：２次元戸田格子（2DToda）

$$\boxed{\frac{1}{2} D_x D_y \, \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2}$$

$$r_n := \log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 r_n}{\partial_x \partial_y} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n-1}}}$$

Bäcklund 変換： $\tau_n \mapsto \overline{\tau}_n,\quad \begin{cases} D_y \, \tau_n \cdot \overline{\tau}_n = \lambda_1 \, \tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \, \tau_n \overline{\tau}_n \\ D_x \, \tau_{n+1} \cdot \overline{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1} \, \tau_n \overline{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \, \tau_{n+1}\overline{\tau}_n \end{cases}$

この変換により, $\tau_n \equiv 1$ から, Casorati 行列式の形で解が作れる．さらに,

$$\psi_{n+1} := \frac{\overline{\tau}_n}{\tau_n}$$

を導入し，２次元戸田格子の Lax 形式も得られる．

固有関数の Gauge 変換： $\phi_n := \lambda_1^{-n-1}\, e^{\lambda_3 x - \lambda_2 y}\, \psi_{n+1}$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\phi_n = v_n\,\phi_n + \phi_{n+1} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\phi_n = -e^{r_n}\phi_{n-1} \end{cases}}$$

$$v_n(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \quad (\equiv -I_{n+1}), \qquad r_n = \log\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}$$

両立条件： $\quad {}^\forall n \in \mathbb{Z}: \quad \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\phi_n\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial}{\partial y}\phi_n\Big)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\big(v_n\phi_n + \phi_{n+1}\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(-e^{r_n}\phi_{n-1}\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}v_n = e^{r_{n+1}} - e^{r_n} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}r_n = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n+1}}}$$

Bäcklund 変換：

$$\boxed{\tau_n \mapsto \widetilde{\tau}_n := \tau_n \phi_n}$$

Q.: $\widetilde{v}_n(x,y) := \dfrac{\partial}{\partial x} \log \dfrac{\widetilde{\tau}_{n+1}}{\widetilde{\tau}_n}, \quad \widetilde{r}_n = \log \dfrac{\widetilde{\tau}_{n+1}\widetilde{\tau}_{n-1}}{\widetilde{\tau}_n^2}$ に対応する固有関数は？

τ_n に対応する作用素 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n\right)$ について, 次の因子分解を考えよう.

(S_n は変数 n に対する shift 作用素である： $S_n: n \mapsto n+1$)

ある g_n に対して：

$$(S_n - g_n)\left(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \widetilde{v}_n - S_n\right)(S_n - g_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad (g_n - v_{n+1})S_n + g_n v_n \equiv (g_{n+1} - \widetilde{v}_n)S_n + \widetilde{v}_n g_n - \frac{\partial g_n}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \widetilde{v}_n = v_{n+1} + g_{n+1} - g_n = v_n + \frac{\partial}{\partial x}\log g_n$$

Bäcklund 変換：

$$\boxed{\tau_n \;\mapsto\; \widetilde{\tau}_n := \tau_n \phi_n}$$

Q.: $\quad \widetilde{v}_n(x,y) := \dfrac{\partial}{\partial x}\log\dfrac{\widetilde{\tau}_{n+1}}{\widetilde{\tau}_n}, \quad \widetilde{r}_n = \log\dfrac{\widetilde{\tau}_{n+1}\widetilde{\tau}_{n-1}}{\widetilde{\tau}_n^2}$ に対応する固有関数は？

τ_n に対応する作用素 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n\right)$ について, 次の因子分解を考えよう.

(S_n は変数 n に対する shift 作用素である： $S_n:\ n \mapsto n+1$)

ある g_n に対して：

$$(S_n - g_n)\left(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n\right){\color{red}\varphi_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \widetilde{v}_n - S_n\right)(S_n - g_n){\color{red}\varphi_n} \ {\color{blue}+\ \gamma(n,x,y)}{\color{red}\varphi_n}$$

しかし, $g_n := \dfrac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$ を, $\varphi_n \in \mathrm{Ker}(S_n - g_n)$ となるように定義し, さらに, φ_n を

$\varphi_n \in \mathrm{Ker}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n\right)$ となるように選ぶと, ${\color{blue}\gamma(n,x,y)} \equiv 0$ であり,

$$(S_n - g_n)\left(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \widetilde{v}_n - S_n\right)(S_n - g_n)$$

が成立する.

同様に, $\varphi_n \in \mathrm{Ker}(\frac{\partial}{\partial y} + e^{r_n} S_n^{-1})$ とすると,

$$(S_n - g_n)(\frac{\partial}{\partial y} + e^{r_n} S_n^{-1}) \equiv (\frac{\partial}{\partial y} + e^{\widetilde{r}_n} S_n^{-1})(S_n - g_n)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \widetilde{r}_n = r_n + \log \frac{g_n}{g_{n-1}} \equiv r_n + \log \frac{\varphi_{n+1}\varphi_{n-1}}{\varphi_n^2}$$

が成り立つ.

ちなみに, 上述の因子分解による $\widetilde{v}_n = v_n + \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$, $\widetilde{r}_n = r_n + \log \frac{\varphi_{n+1}\varphi_{n-1}}{\varphi_n^2}$ は, Bäcklund 変換 $\tau_n \mapsto \widetilde{\tau}_n = \tau_n \varphi_n$ から得られた変換式と等しい、

$$\begin{cases} v_n \mapsto \widetilde{v}_n = v_n + \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \\ r_n \mapsto \widetilde{r}_n = r_n + \log \frac{\varphi_{n+1}\varphi_{n-1}}{\varphi_n^2} \end{cases}$$

$\varphi_n \in \mathrm{Ker}(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n) \cap \mathrm{Ker}(\frac{\partial}{\partial y} + e^{r_n} S_n^{-1})$ は, 明らかに, φ_n が τ_n に対応する固有関数であることを意味する条件である.

定理：

τ_n に対する固有関数, つまり $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\varphi_n = v_n\,\varphi_n + \varphi_{n+1} \\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi_n = -e^{r_n}\varphi_{n-1} \end{cases}$ を満たす

関数 φ_n を用いて, $\widetilde{\tau}_n$ を $\tau_n \mapsto \widetilde{\tau}_n := \tau_n\varphi_n$ で定めるとき, 関数

$$\widetilde{\phi}_n := (S_n - g_n)\phi_n \equiv \phi_{n+1} - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\phi_n$$

は $\widetilde{\tau}_n$ に対する固有関数である.

ただし, ϕ_n は元の τ_n に対する固有関数である.

証明：

i) $$\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \widetilde{v}_n - S_n\Big)\widetilde{\phi}_n = \Big(\frac{\partial}{\partial x} - \widetilde{v}_n - S_n\Big)\big(S_n - g_n\big)\phi_n = \big(S_n - g_n\big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n\Big)\phi_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{\phi}_n = \widetilde{v}_n\,\widetilde{\phi}_n + \widetilde{\phi}_{n+1}$$

ii) $$\Big(\frac{\partial}{\partial y} + e^{\widetilde{r}_n}S_n^{-1}\Big)\widetilde{\phi}_n = \Big(\frac{\partial}{\partial y} + e^{\widetilde{r}_n}S_n^{-1}\Big)\big(S_n - g_n\big)\phi_n = \big(S_n - g_n\big)\Big(\frac{\partial}{\partial y} + e^{r_n}S_n^{-1}\Big)\phi_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\widetilde{\phi}_n = -e^{\widetilde{r}_n}\widetilde{\phi}_{n-1}$$

Darboux 変換：

φ_n を τ_n に対する固有関数とする．そのとき，下記の変換を「Darboux 変換」と呼ぶ．

$$\boxed{\begin{cases} \tau_n \mapsto \widetilde{\tau}_n := \tau_n \varphi_n \\ \phi_n \mapsto \widetilde{\phi}_n := \phi_{n+1} - \dfrac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \phi_n \end{cases}}$$

性質：

i) $\widetilde{\phi}_n \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right)\phi_n \qquad \left(\frac{1}{\varphi_n}\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x}\varphi_n - \phi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right) \equiv \frac{1}{\varphi_n}\left(\phi_{n+1}\varphi_n - \phi_n \varphi_{n+1}\right)\right)$

ii) τ_n に対する固有関数 $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \varphi_n^{(3)}$ を用意し，Darboux 変換の反復を考えよう．

$$\tau_n \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} \widetilde{\tau}_n := \tau_n \varphi_n^{(1)} \xrightarrow{\widetilde{\varphi_n^{(2)}}} \widetilde{\widetilde{\tau}}_n := \widetilde{\tau}_n \widetilde{\varphi^{(2)}}_n \equiv \tau_n\left(\varphi_{n+1}^{(2)}\varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)}\varphi_{n+1}^{(1)}\right)$$

$$\varphi_n^{(2)} \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} \widetilde{\varphi_n^{(2)}} := \varphi_{n+1}^{(2)} - \frac{\varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_n^{(1)}}\varphi_n^{(2)} \qquad \widetilde{\widetilde{\varphi_n^{(3)}}} := \left(\widetilde{\varphi_{n+1}^{(3)}}\widetilde{\varphi_n^{(2)}} - \widetilde{\varphi_n^{(3)}}\widetilde{\varphi_{n+1}^{(2)}}\right) / \widetilde{\varphi_n^{(2)}} \ : \ ?$$

$$\varphi_n^{(3)} \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} \widetilde{\varphi_n^{(3)}} := \varphi_{n+1}^{(3)} - \frac{\varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_n^{(1)}}\varphi_n^{(3)}$$

a) $\varphi^{(2)}_{n+1}\varphi^{(1)}_{n} - \varphi^{(2)}_{n}\varphi^{(1)}_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} \end{vmatrix}$ ： 2 次 Casorati 行列式.

b)
$$\widetilde{\widetilde{\varphi^{(3)}_{n}}} = \widetilde{\varphi^{(3)}_{n+1}}\widetilde{\varphi^{(2)}_{n}} - \widetilde{\varphi^{(3)}_{n}}\widetilde{\varphi^{(2)}_{n+1}}) \,/\, \widetilde{\varphi^{(2)}_{n}}$$
$$= \left(S_n - \frac{\begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n+1} & \varphi^{(1)}_{n+2} \\ \varphi^{(2)}_{n+1} & \varphi^{(2)}_{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} \end{vmatrix}} \frac{\varphi^{(1)}_{n}}{\varphi^{(1)}_{n+1}} \right) \frac{\begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(3)}_{n} & \varphi^{(3)}_{n+1} \end{vmatrix}}{\varphi^{(1)}_{n}}$$
$$= \frac{1}{\varphi^{(1)}_{n+1}\begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} \end{vmatrix}} \left(\begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n+1} & \varphi^{(1)}_{n+2} \\ \varphi^{(3)}_{n+1} & \varphi^{(3)}_{n+2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n+1} & \varphi^{(1)}_{n+2} \\ \varphi^{(2)}_{n+1} & \varphi^{(2)}_{n+2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(3)}_{n} & \varphi^{(3)}_{n+1} \end{vmatrix} \right)$$
$$= \frac{1}{\cancel{\varphi^{(1)}_{n+1}}\begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} \end{vmatrix}} \left(\cancel{\varphi^{(1)}_{n+1}} \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} & \varphi^{(1)}_{n+2} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} & \varphi^{(2)}_{n+2} \\ \varphi^{(3)}_{n} & \varphi^{(3)}_{n+1} & \varphi^{(3)}_{n+2} \end{vmatrix} \right) \quad \text{(Jacobi の公式)}$$

a) $\varphi^{(2)}_{n+1}\varphi^{(1)}_{n} - \varphi^{(2)}_{n}\varphi^{(1)}_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} \end{vmatrix}$ ： ２次 Casorati 行列式.

b) $$\widetilde{\widetilde{\varphi^{(3)}_{n}}} = \widetilde{\varphi^{(3)}_{n+1}}\widetilde{\varphi^{(2)}_{n}} - \widetilde{\varphi^{(3)}_{n}}\widetilde{\varphi^{(2)}_{n+1}}\Big) \Big/ \widetilde{\varphi^{(2)}_{n}}$$
$$= \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} & \varphi^{(1)}_{n+2} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} & \varphi^{(2)}_{n+2} \\ \varphi^{(3)}_{n} & \varphi^{(3)}_{n+1} & \varphi^{(3)}_{n+2} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} \end{vmatrix}$$

従って, Darboux 変換を繰り返すて, ２次元戸田格子の Casorati 行列式として表現できる解は自然に現れる.

$$\tau_n \longmapsto \tau_n\varphi^{(1)}_{n} \longmapsto \tau_n \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} \end{vmatrix} \longmapsto \tau_n \begin{vmatrix} \varphi^{(1)}_{n} & \varphi^{(1)}_{n+1} & \varphi^{(1)}_{n+2} \\ \varphi^{(2)}_{n} & \varphi^{(2)}_{n+1} & \varphi^{(2)}_{n+2} \\ \varphi^{(3)}_{n} & \varphi^{(3)}_{n+1} & \varphi^{(3)}_{n+2} \end{vmatrix}$$

DISDDG2010

特に $\tau_n \equiv 1$ の場合, $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_n^{(i)} = \varphi_{n+1}^{(i)} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\varphi_n^{(i)} = -\varphi_{n-1}^{(i)} \end{cases}$ を用いて, Darboux 変換を N 回繰り返すと,

次の N 次 Casorati 行列式解が得られる.

$$\tau_n^{(N)} = \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^{(N)} & \varphi_{n+1}^{(N)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}$$

このような τ_n は Wronski 行列式としても表せる.

$$\tau_n^{(N)} \equiv \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \frac{\partial}{\partial x}\varphi_n^{(1)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}}\varphi_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \frac{\partial}{\partial x}\varphi_n^{(2)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}}\varphi_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^{(N)} & \frac{\partial}{\partial x}\varphi_n^{(N)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}}\varphi_n^{(N)} \end{vmatrix}$$

性質：

iii) Darboux 変換は可換である．

$$
\begin{array}{ccc}
\tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\ \varphi_n^{(1)}\ } & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)}\varphi_n^{(1)} \\
\varphi_n^{(2)}\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow\ \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \Big/ \varphi_n^{(1)} \\
\tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)}\varphi_n^{(2)} & & \tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}
\end{array}
$$

性質：

iii) Darboux 変換は可換である.

$$
\begin{array}{ccc}
\tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\ \varphi_n^{(1)}\ } & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(1)} \\
\varphi_n^{(2)} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \Big/ \varphi_n^{(1)} \\
\tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(2)} & \longrightarrow & -\tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \\ \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \end{vmatrix}
\end{array}
$$

DISDDG2010

性質：

iii) Darboux 変換は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
\tau_n^{(0)} \arrow[r, "\varphi_n^{(1)}"] \arrow[d, "\varphi_n^{(2)}"'] & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)}\varphi_n^{(1)} \arrow[d, "\begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} / \varphi_n^{(1)}"] \\
\tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)}\varphi_n^{(2)} \arrow[r, "(\sim\ \tau_n/\mathbb{C}\,)"'] & \tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}
\end{tikzcd}
$$

しかし, $\frac{1}{2}D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2$ は $\tau_n \mapsto -\tau_n$ の下で不変であり, 2次元戸田格子の τ 関数を次のような同値類として解釈すると,

$$\tau_n \sim \tau_N/\mathbb{C}$$

上記の「Bianchi diagram」と呼ばれている可換な図式が成立する.

２次元戸田格子の簡約 （その１）

a) 1DToda: $t = x+y, s = x-y;$ $\boxed{{}^{\forall}n: \ \dfrac{\partial}{\partial s}\tau_n = c\,\tau_n \quad (c \in \mathbb{C})}$ $\left(\Rightarrow \quad \frac{\partial r_n}{\partial s} \equiv 0\right)$

$$\boxed{\frac{1}{2}D_t^2\,\tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \tau_n^2} \quad \text{の Lax 形式：} \begin{cases} (S_n + v_n + e^{r_n}S_n^{-1})\phi_n = \lambda\phi_n \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi_n = -e^{r_n}\phi_{n-1} \end{cases}$$

または,

b) sinh-Gordon 方程式: $\boxed{\tau_n = \tau_{n\,\mathrm{mod}2}\,,\ \ \phi_n = \lambda^n\phi_{n\,\mathrm{mod}2}}$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{1}{2}D_xD_y\,\tau_0 \cdot \tau_0 = \tau_1^2 - \tau_0^2 \\ \frac{1}{2}D_xD_y\,\tau_1 \cdot \tau_1 = \tau_0^2 - \tau_1^2 \end{cases}} \quad \text{の Lax 形式：} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & \lambda \\ \lambda & v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_1\end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_1\end{pmatrix} = \dfrac{-1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & e^{r_0} \\ e^{r_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_1\end{pmatrix} \end{cases}$$

は 2DToda の Darboux 変換の下で covariant である．（形は不変であるが, ポテンシャルは変わる.）即ち, 上述の簡約条件は元の可積分系の Darboux 変換に不変に保たれている．

Darboux 変換： $\tau_n \mapsto \widetilde{\tau}_n = \tau_n \varphi_n$ は τ 関数の間の写像である。

Q.: $\widetilde{\tau}_n \mapsto \tau_n = \widetilde{\tau}_n \dfrac{1}{\varphi_n}$ の写像は Darboux 変換となるのか？

A.: 2DToda の Bäcklund 変換において,

$$\begin{cases} D_y\, \tau_n \cdot \overline{\tau}_n = \lambda_1\, \tau_{n+1}\overline{\tau}_{n-1} - \lambda_2\, \tau_n \overline{\tau}_n \\ D_x\, \tau_{n+1} \cdot \overline{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1}\, \tau_n \overline{\tau}_{n+1} + \lambda_3\, \tau_{n+1}\overline{\tau}_n \end{cases}$$

$\psi_{n+1} := \dfrac{\overline{\tau}_n}{\tau_n}$ ではなく, $\phi_n^* := \dfrac{\tau_n}{\overline{\tau}_n}$ を導入すると, 2DToda の

随伴（adjoint）Lax 形式が得られる.（両立条件 = 2DToda）

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\phi_n^* = -\Big(v_{n-1}\, \phi_n^* + \phi_{n-1}^* \Big) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\phi_n^* = e^{r_n}\phi_{n+1}^* \end{cases}}$$

Darboux 変換： $\tau_n \mapsto \widetilde{\tau}_n = \tau_n \varphi_n$ は τ 関数の間の写像である。

Q.: $\widetilde{\tau}_n \mapsto \tau_n = \widetilde{\tau}_n \dfrac{1}{\varphi_n}$ の写像は Darboux 変換となるのか？

定理：

φ_n が τ_n に対する固有関数であるとき, $\dfrac{1}{\varphi_n}$ が $\widetilde{\tau}_n\,(\equiv \tau_n\varphi_n)$ に対する随伴 Lax 形式を満たす.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\varphi_n}\right) = -\left(\widetilde{v}_{n-1}\dfrac{1}{\varphi_n} + \dfrac{1}{\varphi_{n-1}}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{\varphi_n}\right) = e^{\widetilde{r}_n}\dfrac{1}{\varphi_{n+1}} \end{cases}$$

つまり, $\widetilde{\tau}_n \mapsto \tau_n$ は随伴 Lax 形式の固有関数による Darboux 変換である.

$$\boxed{\tau_n \ \underset{\widetilde{\varphi}_n^*}{\overset{\varphi_n}{\rightleftarrows}}\ \widetilde{\tau}_n}$$

Binary Darboux 変換

Bianchi 図式:

$$\begin{array}{ccc} \tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} & \tau_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \varphi_n \\ \tau_n^{(2)} & \xrightarrow[\widehat{\varphi}_n]{} & \tau_n^{(12)} \end{array}$$

$$\begin{cases} \varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_n^{(1)}}\right)\varphi_n^{(2)} \\ \varphi_n^{(2)}\,\widehat{\varphi}_n \equiv \varphi_n^{(1)}\,\varphi_n \end{cases}$$

DISDDG2010

Binary Darboux 変換

Bianchi 図式:

$$\begin{tikzcd} \tau_n^{(0)} \arrow[r, "\varphi_n^{(1)}"] \arrow[d, "\varphi_n^{(2)}"'] & \tau_n^{(1)} \arrow[d, "\varphi_n"] \\ \tau_n^{(2)} \arrow[r, "\widehat{\varphi}_n"'] & \tau_n^{(12)} \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_n^{(1)}}\right)\varphi_n^{(2)} \\ \varphi_n^{(2)}\,\widehat{\varphi}_n \equiv \varphi_n^{(1)}\,\varphi_n \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^* &:= \frac{1}{\varphi_n^{(1)}} \\ \widehat{\varphi_n^*} &:= \frac{1}{\varphi_n^{(2)}} \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{tikzcd} \tau'_n & \tau_n \arrow[l, "\varphi_n^*"'] \arrow[d, "\varphi_n"] \\ \widehat{\tau}_n \arrow[u, "\widehat{\varphi_n^*}"] \arrow[r, "\widehat{\varphi}_n"'] & \widetilde{\tau}_n \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi_n^*}{\varphi_{n+1}^*}\right)\frac{1}{\widehat{\varphi_n^*}} \\ \widehat{\varphi}_n \equiv \frac{\widehat{\varphi_n^*}}{\varphi_n^*}\,\varphi_n \end{cases}$$

固有関数ポテンシアル：

$$
\begin{tikzcd}
\tau'_n & \tau_n \arrow[l, "\varphi^*_n"'] \arrow[d, "\varphi_n"] \\
\widehat{\tau}_n \arrow[u, "\widehat{\varphi^*_n}"] \arrow[r, "\widehat{\varphi}_n"'] & \widetilde{\tau}_n
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{cases}
\varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi^*_n}{\varphi^*_{n+1}}\right)\frac{1}{\widehat{\varphi^*_n}} \\[2ex]
\widehat{\varphi}_n \equiv \dfrac{\widehat{\varphi^*_n}}{\varphi^*_n}\,\varphi_n
\end{cases}
$$

i) $\Longrightarrow$ $$(S_n - 1)\left(\frac{\varphi^*_n}{\widehat{\varphi^*_n}}\right) = \varphi_n\varphi^*_{n+1}$$

固有関数ポテンシアル：

$$
\begin{array}{ccc}
\tau_n' & \xleftarrow{\varphi_n^*} & \tau_n \\
\widehat{\varphi_n^*}\Big\uparrow & & \Big\downarrow \varphi_n \\
\widehat{\tau}_n & \xrightarrow[\widehat{\varphi}_n]{} & \widetilde{\tau}_n
\end{array}
\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
\varphi_n := \left(S_n - \dfrac{\varphi_n^*}{\varphi_{n+1}^*}\right)\dfrac{1}{\widehat{\varphi_n^*}} \\[2ex]
\widehat{\varphi}_n \equiv \dfrac{\widehat{\varphi_n^*}}{\varphi_n^*}\,\varphi_n
\end{array}
\right.
$$

i) $\Longrightarrow \quad (S_n - 1)\left(\dfrac{\varphi_n^*}{\widehat{\varphi_n^*}}\right) = \varphi_n\varphi_{n+1}^*$

ii) <u>定義：</u> $\boxed{\Omega_n := \dfrac{\varphi_n^*}{\widehat{\varphi_n^*}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta_n\Omega_n = \varphi_n\varphi_{n+1}^*, \quad \Delta_n := (S_n - 1)$

$$\widehat{\tau}_n\,\widehat{\varphi}_n = \widetilde{\tau}_n = \tau_n\,\varphi_n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\widehat{\tau}_n = \tau_n\Omega_n}$$

定理：

Ω_n に対し，$\Delta_n\Omega_n = \varphi_n\varphi^*_{n+1}$，$\dfrac{\partial\,\Omega_n}{\partial x} = \varphi_n\varphi^*_n$，$\dfrac{\partial\,\Omega_n}{\partial y} = e^{r_n}\varphi_{n-1}\varphi^*_{n+1}$

とおくと, 次の関係式が成り立つ.

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\Delta_n\Omega_n\big) \equiv \Delta_n\big(\frac{\partial}{\partial x}\Omega_n\big)\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\big(\Delta_n\Omega_n\big) \equiv \Delta_n\big(\frac{\partial}{\partial y}\Omega_n\big)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial}{\partial y}\Omega_n\big) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial}{\partial x}\Omega_n\big)\,,$$

証明：

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\Delta_n\Omega_n\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\varphi_n\varphi^*_{n+1}\big) = \varphi_{n+1}\varphi^*_{n+1} - \varphi_n\varphi^*_n = \Delta_n\big(\frac{\partial}{\partial x}\Omega_n\big)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\Delta_n\Omega_n\big) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\varphi_n\varphi^*_{n+1}\big) = -e^{r_n}\varphi_{n-1}\varphi^*_{n+1} + e^{r_{n+1}}\varphi_n\varphi^*_{n+2} = \Delta_n\big(\frac{\partial}{\partial y}\Omega_n\big)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial}{\partial y}\Omega_n\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(e^{r_n}\varphi_{n-1}\varphi^*_{n+1}\big) = e^{r_n}\big(\varphi_n\varphi^*_{n+1} - \varphi_{n-1}\varphi^*_n\big) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\varphi_n\varphi^*_n\big) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial}{\partial x}\Omega_n\big)$$

定理：

Ω_n に対し， $\Delta_n\Omega_n = \varphi_n\varphi^*_{n+1}\,,\ \dfrac{\partial\,\Omega_n}{\partial x} = \varphi_n\varphi^*_n\,,\ \dfrac{\partial\,\Omega_n}{\partial y} = e^{r_n}\varphi_{n-1}\varphi^*_{n+1}$

とおくと, 次の関係式が成り立つ.

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\Delta_n\Omega_n\big) \equiv \Delta_n\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Omega_n\Big)\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\big(\Delta_n\Omega_n\big) \equiv \Delta_n\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Omega_n\Big)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Omega_n\Big) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Omega_n\Big)\,,$$

系：

$\Delta_n\Omega = \varphi_n\varphi^*_{n+1}\,,\quad \dfrac{\partial\,\Omega}{\partial x} = \varphi_n\varphi^*_n\,,\quad \dfrac{\partial\,\Omega}{\partial y} = e^{r_n}\varphi_{n-1}\varphi^*_{n+1}$ を満たす関数

$\Omega(\varphi_n,\varphi^*_n)$ が存在する．その関数を「固有関数ポテンシャル」と呼ぶ.

具体的に： $\Omega(\varphi_n,\varphi^*_n) = c + \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n-1}\varphi_k\varphi^*_{k+1}$ または, $c + \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\varphi_n\varphi^*_n\,dx,\ \cdots$ （c は積分定数）

例： $\tau_n = 1$ のとき,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\varphi_n = \varphi_{n+1},\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi_n = -\varphi_{n-1} & \Rightarrow\ \varphi_n \sim p^n \exp(px - y/p) \\ \frac{\partial}{\partial x}\varphi_n^* = -\varphi_{n-1}^*,\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi_n^* = \varphi_{n+1}^* & \Rightarrow\ \varphi_n \sim q^{-n} \exp(-qx + y/q) \end{cases}$$

従って,

$$\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) = c + \frac{1}{p-q}\left(\frac{p}{q}\right)^n \exp\left((p-q)(x + \frac{y}{pq})\right)$$

$$\left(\ \Delta_n \Omega = \varphi_n \varphi_{n+1}^*\,,\ \frac{\partial}{\partial x}\Omega = \varphi_n \varphi_n^*\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\Omega = \varphi_{n-1}\varphi_{n+1}^*\ \right)$$

DISDDG2010

Binary Darboux 変換:

$$\boxed{\tau_n \ \mapsto \ \widehat{\tau}_n := \tau_n \, \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}$$

$$\begin{tikzcd} \tau_n' & & \tau_n \arrow[ll, "\varphi_n^*"'] \arrow[d, "\varphi_n"] \\ \widehat{\tau}_n \arrow[u, "\widehat{\varphi_n^*}"] \arrow[rr, "\widehat{\varphi}_n"'] & & \widetilde{\tau}_n \end{tikzcd}$$

$$\left\{ \widehat{\varphi}_n \equiv \frac{\varphi_n}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \right.$$

※ $\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$ は, 積分定数を除いて,

$$\Delta_n \Omega_n = \varphi_n \varphi_{n+1}^*\,, \quad \frac{\partial\, \Omega_n}{\partial x} = \varphi_n \varphi_n^*\,, \quad \frac{\partial\, \Omega_n}{\partial y} = e^{r_n} \varphi_{n-1} \varphi_{n+1}^*$$

によって一意的に定められているものであるが, 積分定数の自由度を利用すると,

$\boxed{\text{任意の定数 } c \text{ に対して, } \widehat{\tau}_n + c\,\tau_n \text{ は 2DToda の } \tau \text{ 関数である}}$

のような不思議な重ね合わせの原理があることが分かる.

Binary Darboux 変換:

$$\boxed{\tau_n \;\mapsto\; \widehat{\tau}_n := \tau_n\,\Omega(\varphi_n,\varphi_n^*)}$$

$$\begin{tikzcd}
\tau_n' & & \tau_n,\ \phi_n \arrow[ll, "\varphi_n^*"'] \arrow[d, "\varphi_n"] \\
\widehat{\phi},\ \widehat{\tau}_n \arrow[u, "\widehat{\varphi_n^*}"] \arrow[rr, "\widehat{\varphi}_n"'] & & \widetilde{\tau}_n,\ \widetilde{\phi}_n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}_n \equiv \dfrac{\varphi_n}{\Omega(\varphi_n,\varphi_n^*)} \\ \left(S_n - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\right)\phi_n = \widetilde{\phi}_n \\ \qquad = \left(S_n - \frac{\widehat{\varphi}_{n+1}}{\widehat{\varphi}_n}\right)\widehat{\phi}_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \phi_{n+1} - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\phi_n \equiv \widehat{\phi}_{n+1} - \frac{\widehat{\varphi}_{n+1}}{\widehat{\varphi}_n}\widehat{\phi}_n = \widehat{\phi}_{n+1} - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\frac{\Omega_n}{\Omega_{n+1}}\widehat{\phi}_n$$

$$\Leftrightarrow \qquad S_n\left[\frac{\Omega_n}{\varphi_n}\left(\phi_n - \widehat{\phi}_n\right)\right] = \frac{1}{\varphi_n}\left[\Omega_n\left(\phi_n - \widehat{\phi}_n\right) + \phi_n\left(S_n - 1\right)\left(\Omega_n\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Delta_n\left[\frac{\Omega_n}{\varphi_n}\left(\phi_n - \widehat{\phi}_n\right)\right] = \frac{\phi_n}{\varphi_n}\Delta_n\Omega_n \equiv \phi_n\varphi_{n+1}^* = \Delta_n\Omega(\phi_n,\varphi_{n+1}^*)$$

だから, $\Omega(\phi_n,\varphi_n^*)$ を導入すると, $\boxed{\widehat{\phi}_n \equiv \phi_n - \dfrac{\Omega(\phi_n,\varphi_n^*)}{\Omega(\varphi_n,\varphi_n^*)}\varphi_n}$ が得られる.

Binary Darboux 変換: $\qquad \tau_n \;\mapsto\; \widehat{\tau}_n := \tau_n\,\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$

$$\begin{tikzcd}
\tau_n' & & \tau_n,\ \phi_n \arrow[ll, "\varphi_n^*"'] \arrow[d, "\varphi_n"] \\
\widehat{\phi},\ \widehat{\tau}_n \arrow[u, "\widehat{\varphi_n^*}"] \arrow[rr, "\widehat{\varphi}_n"'] & & \widetilde{\tau}_n,\ \widetilde{\phi}_n
\end{tikzcd}
\qquad
\left\{\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_n &\equiv \frac{\varphi_n}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \\
\Bigl(S_n - \tfrac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\Bigr)\phi_n &= \widetilde{\phi}_n \\
&= \Bigl(S_n - \tfrac{\widehat{\varphi}_{n+1}}{\widehat{\varphi}_n}\Bigr)\widehat{\phi}_n
\end{aligned}\right.$$

τ 関数の変換 $\boxed{\tau_n \;\mapsto\; \widehat{\tau}_n := \tau_n\,\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}$ に, 次の固有関数と随伴固有関数の変換を加えたものを「binary Darboux」変換と呼ぶ.

$$\boxed{\begin{aligned}
\widehat{\phi}_n &\equiv \phi_n - \frac{\Omega(\phi_n, \varphi_n^*)}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}\varphi_n \\
\widehat{\phi_n^*} &\equiv \phi_n^* - \frac{\Omega(\varphi_n, \phi_n^*)}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}\varphi_n^*
\end{aligned}}$$

binary Darboux 変換の反復：

$\widehat{\tau}_N := \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$ に対する固有関数と随伴固有関数は次の形で与えられている.

$$\widehat{\phi}_n = \begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \varphi_n \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \phi_n \end{vmatrix} / \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) \ , \quad \widehat{\phi_n^*} = \begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \varphi_n^* & \phi_n^* \end{vmatrix} / \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$$

<u>Q.:</u> $\Omega(\widehat{\phi}_n, \widehat{\phi_n^*})$ はどのような代数的な構造を持っているのか.

特に, binary Darboux 変換の反復によって構成できる τ 関数の構造は？

binary Darboux 変換の反復：

$\widehat{\tau}_N := \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$ に対する固有関数と随伴固有関数は次の形で与えられている.

$$\widehat{\phi}_n = \begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \varphi_n \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \phi_n \end{vmatrix} / \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)\,, \qquad \widehat{\phi_n^*} = \begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \varphi_n^* & \phi_n^* \end{vmatrix} / \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$$

Q.: $\Omega(\widehat{\phi}_n, \widehat{\phi_n^*})$ はどのような代数的な構造を持っているのか.

特に, binary Darboux 変換の反復によって構成できる τ 関数の構造は？

定理：

$$\Delta_n\left(\frac{\begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\phi_n, \phi_n^*) \end{vmatrix}}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}\right) \equiv \widehat{\phi}_n\, \widehat{\phi}^*_{n+1}\,,$$

つまり，$\quad \Omega(\widehat{\phi}_n, \widehat{\phi}_n^*) \equiv \dfrac{\begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\phi_n, \phi_n^*) \end{vmatrix}}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}$

binary Darboux 変換の反復：

従って, この固有関数ポテンシャルを用いて, $\widehat{\tau}_n$ から改めて新しい τ 関数が作れる.

$$\tau_n \xrightarrow{\Omega(\varphi_n,\varphi_n^*)} \tau_n\,\Omega(\varphi_n,\varphi_n^*) \xrightarrow{\Omega(\widehat{\phi}_n,\widehat{\phi}_n^*)} \tau_n \begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n,\varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n,\phi_n^*) \\ \Omega(\phi_n,\varphi_n^*) & \Omega(\phi_n,\phi_n^*) \end{vmatrix}$$

例えば、$\tau_n \equiv 1$ から出発し, binary Darboux 変換を N 回繰り返すと, N 次 Gram 行列式（Grammian）で表せる τ 関数が得られる.

$$\boxed{\tau_n^{(N)} = \left|\,\Omega(\varphi^{(i)},\varphi^{*(j)})\,\right|_{i,j=1..N}}$$

$$(\varphi_n^{(i)} \sim p_i^n \exp(p_i x - y/p_i))\,,\ \varphi^{*(j)}_n \sim q_j^n \exp(-q_j x + y/q_j)))$$

この τ 関数に対する Lax 形式の解は次の形をとる.

$$\phi_n^{(N)} = \begin{vmatrix} \Omega(\varphi^{(1)},\varphi^{*(1)}) & \dots & \Omega(\varphi^{(1)},\varphi^{*(N)}) & \varphi^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Omega(\varphi^{(N)},\varphi^{*(1)}) & \dots & \Omega(\varphi^{(N)},\varphi^{*(N)}) & \varphi^{(N)} \\ \Omega(\varphi^{(N+1)},\varphi^{*(1)}) & \dots & \Omega(\varphi^{(N+1)},\varphi^{*(N)}) & \varphi^{(N+1)} \end{vmatrix} \Big/ \tau_n^{(N)}$$

２次元戸田格子の簡約 （その２：格子の折り重ね）

普通の Darboux 変換の下で不変ではないのに, binary Darboux 変換の下で不変である簡約の一つとして, 次の例が知られている：$\boxed{\tau_{-1-n} = \tau_n\,,\ \phi^*_n = (-1)^n \phi_{-1-n}}$

その結果, $\underline{v_{-1-n} + v_{n-1} = 0\,,\ v_{-1} = 0\,,\quad r_{-1-n} = r_n}$ が成立し, B-型と呼ばれる２次元の（半無限）戸田格子が得られる.

$$r_0 = \log \frac{\tau_1}{\tau_0}\,,\ r_{n\geq 1} = \log \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2}\,,\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 r_0}{\partial_x \partial_y} = e^{r_1} - 2e^{r_0} + e^{r_{-1}} \equiv e^{r_1} - e^{r_0} \\ \dfrac{\partial^2 r_n}{\partial_x \partial_y} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n-1}} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

さらに, 随伴 Lax 形式から,

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi^*_0 = -v_{-1}\phi^*_0 - \phi^*_{-1} \ \Leftrightarrow\ \underline{\frac{\partial}{\partial x}\phi_{-1} = \phi_0}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\Omega(\phi_0, \phi^*_0) \equiv \Omega(\frac{\partial}{\partial x}\phi_{-1}, \phi_{-1}) = \frac{1}{2}\phi^2_{-1} + c}$$

が分かる.

B-型２次元戸田格子の簡約

その結果, τ_0 が完全平方式になるような解も存在することが分かる.

例： $N=1:\ \tau_0 = \frac{1}{2}\phi_{-1}^2,\quad N=2:\ \tau_0 = \left[\frac{1}{2}\int\left(\varphi_{-1}^{(2)}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{-1}^{(1)} - \varphi_{-1}^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{-1}^{(2)}\right)dx\right]^2$

このような τ_0 の平方根は Pfaffian の代数的構造を持つ.

この B-型戸田格子に, さらに, 周期的な条件を課すと,

$$\tau_n = \tau_{n\ \mathrm{mod}3},$$

特に：
$$\tau_2 = \tau_{-1} \equiv \tau_0,$$

微分幾何学においてよく知られている Tzitzeica 方程式が得られる.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}D_xD_y\tau_0\cdot\tau_0 = \tau_1\tau_0 - \tau_0^2 \\ \frac{1}{2}D_xD_y\tau_1\cdot\tau_1 = \tau_0^2 - \tau_1^2 \end{cases},$$

$$r_0 = \log\frac{\tau_1}{\tau_0},\ r_1 = \log\frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} \equiv 2r_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial^2 r_0}{\partial_x\partial_y} = e^{-2r_0} - e^{r_0}}$$

DISDDG2010

離散戸田格子

$$\begin{array}{ccc}
\tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}=\frac{\tau_n^{(1)}}{\tau_n^{(0)}}} & \tau_n^{(1)}=\tau_n^{(0)}\varphi_n^{(1)} \\
\varphi_n^{(2)}=\frac{\tau_n^{(2)}}{\tau_n^{(0)}}\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\tau_n^{(2)}=\tau_n^{(0)}\varphi_n^{(2)} & \longrightarrow & \tau_n^{(12)}=\tau_n^{(0)}\begin{vmatrix}\varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)}\end{vmatrix}
\end{array}$$

この Bianchi 図式に現れる τ 関数の間に双線形関係式が成り立つ.

$$\Longleftrightarrow \quad \tau_n^{(12)}=\frac{1}{\tau_{n+1}^{(0)}}\left(\tau_{n+1}^{(2)}\tau_n^{(1)}-\tau_{n+1}^{(1)}\tau_n^{(2)}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\tau_{n+1}^{(0)}\tau_n^{(12)}-\tau_n^{(1)}\tau_{n+1}^{(2)}+\tau_n^{(2)}\tau_{n+1}^{(1)}=0}$$

離散戸田格子

$$\begin{array}{ccc} \phi_n^{(0)},\ \tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\quad \varphi_n^{(1)} = \frac{\tau_n^{(1)}}{\tau_n^{(0)}} \quad} & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)}\varphi_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} = \dfrac{\tau_n^{(2)}}{\tau_n^{(0)}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)}\varphi_n^{(2)} & \longrightarrow & \tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \end{array}$$

上記の Bianchi 図式に現れる τ 関数の間に双線形関係式が成り立つ.

$$\Longleftrightarrow \quad \tau_n^{(12)} = \frac{1}{\tau_{n+1}^{(0)}}\left(\tau_{n+1}^{(2)}\tau_n^{(1)} - \tau_{n+1}^{(1)}\tau_n^{(2)}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\tau_{n+1}^{(0)}\tau_n^{(12)} - \tau_n^{(1)}\tau_{n+1}^{(2)} + \tau_n^{(2)}\tau_{n+1}^{(1)} = 0}$$

この双線形形式は, 実は, 離散可積分系として解釈できるものである. そのために, まず, その可積分系の Lax 形式と見なされるものを導こう.

i) $$\phi_n^{(i)} \equiv \phi_{n+1}^{(0)} - \frac{\varphi_{n+1}^{(i)}}{\varphi_n^{(i)}}\phi_n^{(0)} = \phi_{n+1}^{(0)} - \frac{\tau_n^{(0)}\tau_{n+1}^{(i)}}{\tau_n^{(i)}\tau_{n+1}^{(0)}}\phi_n^{(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\phi_n^{(0)} = \frac{\tau_n^{(i)}\tau_{n+1}^{(0)}}{\tau_n^{(0)}\tau_{n+1}^{(i)}}\left(\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n^{(i)}\right)}$$

ii) $$\phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)} = \phi_n^{(0)}\frac{\tau_n^{(1)}\tau_{n+1}^{(2)} - \tau_n^{(2)}\tau_{n+1}^{(1)}}{\tau_n^{(1)}\tau_n^{(2)}\tau_{n+1}^{(0)}}\tau_n^{(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\phi_n^{(0)} = \frac{\tau_n^{(1)}\tau_n^{(2)}}{\tau_n^{(0)}\tau_n^{(12)}}\left(\phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)}\right)}$$

“離散戸田格子”

ここで τ_n を３次元の格子上の関数として解釈すると，

$$\tau(n, m_1, m_2):\ \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{C}$$

具体的に： $\tau_n^{(1)} = \tau(n, m_1+1, m_2)$， $\tau_n^{(2)} = \tau(n, m_1, m_2+1)$

$\tau(n, m_1, m_2)$ が広田・三輪方程式を満たすことが分かる．

$$\boxed{\tau(n+1)\tau(m_1+1, m_2+1) - \tau(m_1+1)\tau(n+1, m_2+1) + \tau(m_2+1)\tau(n+1, m_1+1) = 0}$$

同様に，ϕ_n を $\mathbb{Z}^3$ 上の関数として解釈すると，広田・三輪方程式の Lax 形式が得られる．

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\tau(m_1+1)\tau(n+1)}{\tau\,\tau(n+1, m_1+1)}\left[\phi(n+1) - \phi(m_1+1)\right]\\ &= \frac{\tau(m_2+1)\tau(n+1)}{\tau\,\tau(n+1, m_2+1)}\left[\phi(n+1) - \phi(m_2+1)\right]\\ &= \frac{\tau(m_1+1)\tau(m_2+1)}{\tau\,\tau(m_1+1, m_2+1)}\left[\phi(m_1+1) - \phi(m_2+1)\right]\end{aligned}$$

（両立条件：$S_n\big(\phi(m_1+1, m_2+1)\big) = S_{m_1}\big(\phi(n+1, m_2+1)\big) = S_{m_2}\big(\phi(n+1, m_1+1)\big)$ は広田・三輪）

Gauge 変換： $\tau \mapsto (c-b)^{nm_2}(c-a)^{nm_1}(a-b)^{m_1m_2}\,\tau\,,\ \phi \mapsto a^{m_1}b^{m_2}c^n\,\phi$
を行ってから, m_1, m_2, n を ℓ, m, n と書くと, 広田・三輪方程式の標準的な形が得られる.

HM：

$$\boxed{\begin{aligned}(b-c)\tau(\ell+1)\tau(m+1,n+1)+(c-a)\tau(m+1)\tau(\ell+1,n+1)\\ +(a-b)\tau(n+1)\tau(\ell+1,m+1)=0\end{aligned}}$$

Lax 形式：（HM 方程式と同様に巡回置換 $(\ell,a)\to(m,b)\to(n,c)\to(\ell,a)$ の対称性を持つ）

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{a-b}\,\frac{\tau(\ell+1)\tau(m+1)}{\tau\,\tau(\ell+1,m+1)}\left[a\,\phi(\ell+1)-b\,\phi(m+1)\right]\\ &= \frac{1}{b-c}\,\frac{\tau(m+1)\tau(n+1)}{\tau\,\tau(m+1,n+1)}\left[b\,\phi(m+1)-c\,\phi(n+1)\right]\\ &= \frac{1}{c-a}\,\frac{\tau(n+1)\tau(\ell+1)}{\tau\,\tau(\ell+1,n+1)}\left[c\,\phi(n+1)-a\,\phi(\ell+1)\right]\end{aligned}$$

上記の広田・三輪方程式は２次元戸田格子の可積分な離散化であるのが, KP 方程式の離散化でもある. それを後ほど説明する.

HM 方程式の Darboux / binary Darboux 変換

Darboux 変換：

$$\boxed{\begin{cases} \tau & \mapsto \quad \tau\,\varphi \\ \phi & \mapsto \quad c\Big(\phi(n+1) - \dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi}\phi\Big) \end{cases}}$$

(φ, ϕ : τ に対応する固有関数)

$$(※\quad c\Big(\phi(n+1) - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi}\phi\Big) = a\Big(\phi(\ell+1) - \frac{\varphi(\ell+1)}{\varphi}\phi\Big) = b\Big(\phi(m+1) - \frac{\varphi(m+1)}{\varphi}\phi\Big)\ )$$

随伴 Lax 形式：

$$\Phi^*(\ell+1, m+1) = \frac{1}{a-b}\,\frac{\tau(\ell+1)\tau(m+1)}{\tau\,\tau(\ell+1, m+1)}\left[a\,\phi^*(m+1) - b\,\phi^*(\ell+1)\right]$$

$$\Phi^*(m+1, n+1) = \frac{1}{b-c}\,\frac{\tau(m+1)\tau(n+1)}{\tau\,\tau(m+1, n+1)}\left[b\,\phi^*(n+1) - c\,\phi^*(m+1)\right]$$

$$\Phi^*(\ell+1, n+1) = \frac{1}{c-a}\,\frac{\tau(\ell+1)\tau(n+1)}{\tau\,\tau(\ell+1, n+1)}\left[c\,\phi^*(\ell+1) - a\,\phi^*(n+1)\right]$$

adjoint Darboux 変換：

$$\begin{cases} \tau & \mapsto \quad \tau\,\varphi^* \\ \phi^* & \mapsto \quad c\Big(\phi^*(n-1) - \dfrac{\varphi^*(n-1)}{\varphi^*}\phi^*\Big) \end{cases}$$

HM 方程式の Darboux / binary Darboux 変換

Darboux 変換：
$$\boxed{\begin{cases} \tau & \mapsto \quad \tau\,\varphi \\ \phi & \mapsto \quad c\Big(\phi(n+1) - \dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi}\phi\Big) \end{cases}}$$
(φ, ϕ： τ に対応する固有関数)

$$\left(※ \quad c\Big(\phi(n+1) - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi}\phi\Big) = a\Big(\phi(\ell+1) - \frac{\varphi(\ell+1)}{\varphi}\phi\Big) = b\Big(\phi(m+1) - \frac{\varphi(m+1)}{\varphi}\phi\Big) \right)$$

binary Darboux 変換：

$\Omega(\varphi, \varphi^*)$ を定義し：
$$\boxed{\Delta_n\Omega = \varphi\,S_n\big(\varphi^*\big),\ \Delta_\ell\Omega = \varphi\,S_\ell\big(\varphi^*\big),\ \Delta_m\Omega = \varphi\,S_m\big(\varphi^*\big)}$$

$$\Big(\ \Delta_n\big(\Delta_\ell\Omega\big) = \Delta_\ell\big(\Delta_n\Omega\big);\ \Delta_n\big(\Delta_m\Omega\big) = \Delta_m\big(\Delta_n\Omega\big);\ \Delta_m\big(\Delta_\ell\Omega\big) = \Delta_\ell\big(\Delta_m\Omega\big)\ \Big)$$

$$\boxed{\begin{cases} \tau & \mapsto \quad \tau\,\Omega(\varphi, \varphi^*) \\ \phi & \mapsto \quad \phi - \dfrac{\Omega(\phi, \varphi^*)}{\Omega(\varphi, \varphi^*)}\varphi \\ \phi^* & \mapsto \quad \phi^* - \dfrac{\Omega(\varphi, \phi^*)}{\Omega(\varphi, \varphi^*)}\varphi^* \end{cases}}$$

Proof:

$$
\begin{tikzcd}
\phi \arrow[rr, "\text{Darboux 変換}"] \arrow[d, "\text{元の Lax 形式}"'] & & \widetilde{\phi} \\
\phi^{(1)} \arrow[rr, "\text{Darboux 変換}"'] & & \widetilde{\phi}^{(1)}
\end{tikzcd}
$$

Proof:

$$
\begin{tikzcd}
\phi \arrow[r, "\text{Darboux 変換}"] \arrow[d, "\text{元の Lax 形式}"'] & \widetilde{\phi} \arrow[d, "\textcolor{red}{\text{Darboux 変換} \equiv \text{Lax 形式}}"] \\
\phi^{(1)} \arrow[r, "\text{Darboux 変換}"'] & \widetilde{\phi}^{(1)}
\end{tikzcd}
$$

しかし, 元の Lax 形式は実は Darboux 変換の作用を記述し, Darboux 変換の可換図式が成り立つので, $\widetilde{\phi}$ と $\widetilde{\phi}^{(1)}$ の間にも Darboux 変換がある. 即ち, $\widetilde{\phi}$ と $\widetilde{\phi}^{(1)}$ の間にも Lax 形式が成り立つ.

広田・三輪方程式の解

$\tau \equiv 1$ のとき, Lax 形式が簡単な分散関係式に帰着し, $\boxed{\Delta_\ell \varphi = \Delta_m \varphi = \Delta_n \varphi}$

$\big(\Delta_\ell := a(S_\ell - 1),\ \Delta_m := b(S_m - 1),\ \Delta_n := c(S_n - 1)\big)$

$$\boxed{\varphi \sim \left(1 - \frac{p}{a}\right)^\ell \left(1 - \frac{p}{b}\right)^m \left(1 - \frac{p}{c}\right)^n}$$

はその分散関係式の基本解である.（ $\Delta_\ell \varphi = a(1 - \frac{p}{a} - 1)\varphi = -p\varphi = \Delta_m \varphi = \Delta_n \varphi$ ）

さらに, adjoint の Lax 形式から $\boxed{a\big(1 - S_\ell^{-1}\big)\varphi^* = b\big(1 - S_m^{-1}\big)\varphi^* = c\big(1 - S_n^{-1}\big)\varphi^*}$

を得, このような分散関係式の随伴版の基本解を下記のものとする.

$$\boxed{\varphi^* \sim \left(1 - \frac{q}{a}\right)^{-\ell} \left(1 - \frac{q}{b}\right)^{-m} \left(1 - \frac{q}{c}\right)^{-n}}$$

広田・三輪方程式の解

Casorati 行列式解：

$$\tau = \begin{vmatrix} \varphi^{(1)} & \Delta_\ell \varphi^{(1)} & \dots & \Delta_\ell^{N-1} \varphi^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^{(N)} & \Delta_\ell \varphi^{(N)} & \dots & \Delta_\ell^{N-1} \varphi^{(N)} \end{vmatrix}$$

例： $\varphi^{(i)} = \left(1 - \frac{p_i}{a}\right)^\ell \left(1 - \frac{p_i}{b}\right)^m \left(1 - \frac{p_i}{c}\right)^n + \gamma_i \left(1 - \frac{p_i'}{a}\right)^\ell \left(1 - \frac{p_i'}{b}\right)^m \left(1 - \frac{p_i'}{c}\right)^n \rightarrow$ N ソリトン

Gram 行列式解：

$$\tau = \det\left(\Omega(\varphi^{(i)}, \varphi^{*(j)}) \right)_{i,j=1..N}$$

$$\Delta_\ell \Omega^{(i,j)} = \varphi^{(i)} S_\ell \left(\varphi^{*(j)}\right), \ \Delta_m \Omega^{(i,j)} = \varphi^{(i)} S_m \left(\varphi^{*(j)}\right), \ \Delta_n \Omega^{(i,j)} = \varphi^{(i)} S_n \left(\varphi^{*(j)}\right)$$

例： $\Omega^{(i,j)} = C + \frac{1}{q_j - p_j} \left(\frac{a - p_i}{a - q_j}\right)^\ell \left(\frac{b - p_i}{b - q_j}\right)^m \left(\frac{c - p_i}{c - q_j}\right)^n \rightarrow$ N ソリトン

特殊関数解：　$a = z^{-1}$, $b = 1$, $c = 0$ を選び, 次の HM 方程式を考えよう.

$$\boxed{\tau(m+1)\tau(\ell+1,n+1) - z\,\tau(\ell+1)\tau(m+1,n+1) + (z-1)\tau(n+1)\tau(\ell+1,m+1) = 0}$$

この方程式の Lax 形式を得るのに gauge 変換を施す必要がある：$\phi \mapsto (-c)^{-n}\phi$

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{z-1}\,\frac{\tau(\ell+1)\tau(m+1)}{\tau\,\tau(\ell+1,m+1)}\big[z\,\phi(m+1) - \phi(\ell+1)\big] \\
&= \frac{\tau(\ell+1)\tau(n+1)}{\tau\,\tau(\ell+1,n+1)}\big[\phi(\ell+1) + z\,\phi(n+1)\big] \\
&= \frac{\tau(m+1)\tau(n+1)}{\tau\,\tau(m+1,n+1)}\big[\phi(m+1) + \phi(n+1)\big]
\end{aligned}$$

特に, $\tau \equiv 1$ の場合, $\boxed{z^{-1}\big[\phi - \phi(\ell+1)\big] = \phi - \phi(m+1) = \phi(n+1)}$ が得られる.

つまり, 基本解 $\varphi_\zeta \sim \zeta^n(1-\zeta)^m(1-z\,\zeta)^\ell$ から Casorati 行列式解が構成できる.

特殊関数解：

$a = z^{-1}$, $b = 1$, $c = 0$ を選び, 次の HM 方程式を考えよう.

$$\boxed{\tau(m+1)\tau(\ell+1,n+1) - z\,\tau(\ell+1)\tau(m+1,n+1) + (z-1)\tau(n+1)\tau(\ell+1,m+1) = 0}$$

ちなみに, $\varphi_\zeta \sim \zeta^n(1-\zeta)^m(1-z\zeta)^\ell$ の任意の重ね合わせが分散関係式を満たすこと,

また, φ_ζ が次の超幾何関数 ${}_2\mathbf{F}_1$ の積分表現に現れる被積分関数と等しいことに注意する.

$${}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix} a\,, b \\ c \end{matrix} \,; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \mathrm{d}t \;\; t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,(1-zt)^{-a}\,.$$

従って, $\Phi := \displaystyle\int_0^1 \varphi_\zeta\,\zeta^{\beta-1}(1-\zeta)^{\gamma-\beta-1}\,(1-z\,\zeta)^{-\alpha}\mathrm{d}\zeta$ のような重ね合わせにすると,

$$\boxed{\tau(\ell,m,n) = \frac{\Gamma(n+\beta)\Gamma(m+\gamma-\beta)}{\Gamma(m+n+\gamma)}\;{}_2\mathbf{F}_1\left(\begin{matrix} \alpha-\ell\,, \beta+n \\ \gamma+m+n \end{matrix} \,; z\right)}$$

が上記の HM 方程式を満たすことが分かる. さらに, Φ が持つパラメータ α, β, γ の自由度を利用すると, Φ を成分とする Casorati 行列式が解となることも明らかである.

連続極限 (その１)

$z=\delta^2$ と書き, $\boxed{\lambda=\ell\,,\ \mu=-m\,,\ \nu=n+\ell}$ の座標変換を施す.

$$\Rightarrow\quad \tau(\lambda+1,\nu+1)\tau(\mu-1,\nu-1)-\delta^2\tau(\lambda+1)\tau(\mu-1)+(\delta^2-1)\tau\,\tau(\lambda+1,\mu-1)=0$$

ここで, $\boxed{x=\frac{\mu}{\delta}\,,\ y=\frac{\lambda}{\delta}}$ と置き, $\delta\to\infty$ の極限をとると２次元戸田格子が得られる.

$$\tau(\nu+1)\tau(\nu-1)+\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial\tau}{\partial y}-\tau\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}-\tau^2=0$$

$$\Leftrightarrow\qquad \frac{1}{2}D_xD_y\tau\cdot\tau\ =\ \tau(\nu+1)\tau(\nu-1)-\tau^2$$

Lax 形式の連続極限をとる前に, $\phi\mapsto\delta^{-\nu}(-\delta^2)^{\lambda}\,\phi$ を施す必要がある.

$$\Rightarrow\qquad \frac{\partial}{\partial x}\phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\tau(\nu+1)}{\tau}\right)\phi+\phi(\nu+1)\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\phi=-\frac{\tau(\nu+1)\tau(\nu-1)}{\tau^2}\,\phi(\nu-1)$$

特に $\tau\equiv 1$ のとき, $\underline{\varphi\sim(\zeta\delta)^{\nu}\,(1-\zeta)^{-x\delta}(1-\frac{1}{\delta^2\zeta})^{y\delta}}\ \xrightarrow[\zeta=\eta/\delta]{\delta\to\infty}\ \underline{\eta^{\nu}e^{\eta x-y/\eta}}$

2DToda の特殊解：

$$\boxed{\frac{1}{2}D_xD_y\tau\cdot\tau \;=\; \tau(\nu+1)\tau(\nu-1)-\tau^2}$$

この基本解 $\underline{\varphi_\eta=\eta^\nu e^{\eta x-y/\eta}}$ に対して, 次の重ね合わせを考えよう.

$$\Phi := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}\eta^{-1-s}\varphi_\eta\,\mathrm{d}\eta \qquad (xy>0)$$

ここで $\eta=t\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ とし, Bessel 関数 $J_s(z)$ の積分表現と比較する.

$$J_s(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}t^{-1-s}e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}\,\mathrm{d}t \qquad (z>0)$$

つまり, 関数 $\Phi^{(s)}$ とそれらを成分とする Casorati 行列が 2DToda の解である.

$$\Phi^{(s)}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu-s}{2}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}t^{\nu-s-1}e^{\sqrt{xy}(t-\frac{1}{t})}\,\mathrm{d}t\ \right]$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{\Phi^{(s)}(\nu;x,y)\;\equiv\;\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu-s}{2}}J_{s-\nu}(2\sqrt{xy})}$$

HM から KP への極限

HM： $$\boxed{\begin{aligned}&(b-c)\tau(\ell+1)\tau(m+1,n+1)+(c-a)\tau(m+1)\tau(\ell+1,n+1)\\ &\qquad\qquad+(a-b)\tau(n+1)\tau(\ell+1,m+1)=0\end{aligned}}$$

2DToda と同様に, 座標変換を行ってから HM の連続極限は比較的に簡単にとれる.

三輪変換： $$\boxed{x_1=\frac{\ell}{a}+\frac{m}{b}+\frac{n}{c},\ x_2=\frac{\ell}{2a^2}+\frac{m}{2b^2}+\frac{n}{2c^2},\ x_3=\frac{\ell}{3a^3}+\frac{m}{3b^3}+\frac{n}{3c^3}}$$

HM 方程式 $(\tau(\ell,m,n))$ $$\xrightarrow{a,b,c\to\infty}\ \boxed{\left(4D_{x_1}D_{x_3}-D_{x_1}^4-3D_{x_2}^2\right)\tau\cdot\tau\ =\ 0}\quad(\tau(x_1,x_2,x_3))$$

Lax 形式の連続極限： $$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x_2}\phi+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi+u\,\phi=0\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\phi=\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\phi+\frac{3}{2}u\,\frac{\partial}{\partial x_1}\phi+\frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-v\right)\phi\end{cases}$$

$$u(x_1,x_2,x_3):=2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\log\tau(x_1,x_2,x_3),\ v(x_1,x_2,x_3):=2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\log\tau(x_1,x_2,x_3)$$

(その両立条件： $$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\partial v}{\partial x_1},\quad 4\frac{\partial u}{\partial x_3}-\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}-6u\frac{\partial u}{\partial x_1}=3\frac{\partial v}{\partial x_2}$$)

KP 方程式の Darboux 変換

2DToda の Darboux 変換には離散と連続の表現は両方あり,

$$\tau \mapsto \tau\varphi, \quad \phi \mapsto S_n(\phi) - \phi\frac{S_n(\phi)}{\varphi} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial x}\log\varphi$$

この変換の連続版は HM 方程式の Darboux 変換の連続極限と等しい.

$$\boxed{\tau \mapsto \tau\varphi}, \quad \phi \mapsto c\Big(\phi(x_1+\frac{1}{c}) - \frac{\phi}{\varphi}\varphi(x_1+\frac{1}{c})\Big) \xrightarrow{c\to\infty} \boxed{\phi \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial x}\log\varphi}$$

HM の随伴 Lax 形式の連続極限で KP 方程式の随伴 Lax 形式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\phi^* = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi^* + u\,\phi^*\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\phi^* = \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\phi^* + \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x_1}\phi^* + \frac{3}{4}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1} + v\Big)\phi^*$$

これにより, 次の全微分形式を用いて固有関数ポテンシャル $\Omega(\phi,\phi^*)$ が定義でき,

$$d\Omega \;=\; \underline{\phi\phi^*}\,dx_1 + \Big(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial x_1} - \phi^*\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\Big)\,dx_2 + \Big(\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial x_1^2} - \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial\phi^*}{\partial x_1} + \phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{3}{2}u\phi\phi^*\Big)dx_3$$

KP の binary Darboux 変換は 2DToda と同じものである： $\boxed{\frac{\partial}{\partial x_1}\Omega = \phi\phi^*}$

KP 方程式の簡約：KdV

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_2}\tau = c\tau} \quad (c \in \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow \ (4D_{x_1}D_{x_3} - D_{x_1}^4)\tau\cdot\tau = 0 \ \xrightarrow[x_1=x]{x_3=-4t} \ \boxed{(D_xD_t + D_x^4)\tau\cdot\tau = 0}$$ ：KdV の双線形形式

この簡約条件の下で, $v=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ となり, さらに KP の固有関数に $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\dfrac{k^2}{4}\phi$ を課すと, KdV 方程式の Lax 形式が得られる.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + u\,\phi = \frac{k^2}{4}\phi \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi = -\left(4\frac{\partial^3}{\partial x^3}\phi + 6u\,\frac{\partial}{\partial x}\phi + 3\frac{\partial u}{\partial x}\phi\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{両立条件}} \underline{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$ ：KdV

<u>定理：</u>

上記の簡約条件は KP の Darboux 変換の下で不変であり, KdV 方程式にも Darboux 変換が存在する.

つまり, $\tau = 1$ のとき, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \dfrac{k^2}{4}\varphi$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -4\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$ の一般解 $\varphi^{(i)} := \alpha_i e^{\frac{k_i}{2}(x-k_i^2t)} + \beta_i e^{-\frac{k_i}{2}(x-k_i^2t)}$

により, KdV の N ソリトン解を生成する τ 関数が得られる： $\tau = \det\left(\dfrac{\partial^{j-1}\varphi^{(i)}}{\partial x^{j-1}}\right)_{i,j=1..N}$

KdV 方程式の Darboux 変換の解析的な解釈：

KdV の Lax 形式, 特に KdV の固有関数が満たす「スペクトル問題」と呼ばれる方程式

$\underline{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + u\,\phi = \frac{k^2}{4}\phi}$, は $\boxed{\phi \mapsto \dfrac{\partial\phi}{\partial x} - \dfrac{\phi}{\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}$ の下で covariant である：$\underline{u \mapsto u + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\varphi}$.

[Darboux (1889)]

On obtient donc pour Z une solution qui est le produit d'une fonction de $x+y$ par une fonction de $x-y$, c'est-à-dire qui est aussi harmonique.

408. Il est aisé de vérifier le résultat précédent. Si l'on introduit en effet la fonction

$$u = \theta' - \theta \frac{f'}{f}, \tag{8}$$

on reconnaît par un calcul facile que l'on a

$$\frac{u''}{u} = f\left(\frac{1}{f}\right)'' + h. \tag{9}$$

On est ainsi conduit au curieux théorème d'Analyse suivant :

Étant donnée l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = [\varphi(t) + h]y, \tag{10}$$

supposons qu'on sache l'intégrer pour toutes les valeurs de h. Soit $f(t)$ une solution de cette équation, correspondante à une valeur particulière de h, par exemple $h = h_1$. On saura aussi intégrer, pour toutes les valeurs de h, l'équation

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \left[f\left(\frac{1}{f}\right)'' + h - h_1\right]y. \tag{11}$$

Si y désigne la solution générale de l'équation (10) *correspondante à une valeur déterminée de h, différente de h_1,*

$$y' - y\frac{f'}{f} \tag{12}$$

sera la solution générale de l'équation (11) *pour la même valeur de h.*

Cette proposition, qu'il est aisé de vérifier directement [1], permet, évidemment, de rattacher à toute équation de la forme (10), que

[1] On trouvera la démonstration directe dans une Note de l'auteur *Sur une proposition relative aux équations linéaires*, insérée aux *Comptes rendus* (t. XCIV, p. 1456; 1882).

KdV 方程式の Darboux 変換の解析的な解釈：

KdV の Lax 形式, 特に KdV の固有関数が満たす「スペクトル問題」と呼ばれる方程式

$\underline{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + u\,\phi = \frac{k^2}{4}\phi}$, は $\boxed{\phi \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\phi}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$ の下で covariant である：$\underline{u \mapsto u + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\varphi}$.

[Darboux (1889)]

<u>定理：</u>

$q(x) \in L_1^1 := \left\{ p(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\big(1+|x|\big)\mathrm{d}x < \infty \right\}$ とし, このようなポテンシャル $q(x)$ に依存する自己共役作用素 $H := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x)$ には n 個の束縛状態 $-\beta_n^2 < \cdots < -\beta_1^2$ があるとする．（ただし, $\beta_j > 0$ とする.） $\beta > \beta_n$ と置き,

$$H \cdot f_j = -\beta^2 f_j\ , \quad f_1(x,\beta) \sim e^{-\beta x}\ (x \to +\infty)\ ,\ f_2(x,\beta) \sim e^{\beta x}\ (x \to -\infty)$$

をみたす関数 $f_1(x,\beta), f_2(x,\beta)$ と定数 $\alpha > 0$ により, 次の関数を定義する.

$$g_\alpha(x) := f_1(x,\beta) + \alpha f_2(x,\beta)\ , \quad \overline{q}(x) := q(x) - 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\log g_\alpha(x)$$

そのとき, $\overline{q}(x) \in L_1^1$ には $n+1$ 個の束縛状態 $-\beta^2 < -\beta_n^2 < \cdots < -\beta_1^2$ がある.

[Deift, Trubowitz (1979)]：[Crum (1955)] ($x \in [0,1]$), または [Krein (1957)] ($x \in [0,+\infty)$) の拡張.)

DISDDG2010

KP の 1+1 次元可積分系への簡約化　（その 2）

$$\text{“ } \tau_{x_n} = c\,\tau \text{ ”}$$

より一般的な簡約条件： $\boxed{\tau_{x_n} = \widehat{\tau}}$　　$\widehat{\tau}$: “Darboux 変換による新しい τ 関数”

i)　$c\,\tau$: $\varphi = 0$ による自明な変換　　($\tau \mapsto \tau e^{cx_n}$ は双線形形式の対称性である： $\tau \mapsto c\,\tau \ \sim 0$)

ii)　$\tau_{x_1} = \tau\,\phi$: Darboux 変換　　$\Rightarrow$　$\phi = \frac{\partial}{\partial x_1}\log\tau$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi + u\,\phi = 0 \quad \stackrel{red.}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi + 2\,\phi\frac{\partial}{\partial x_1}\phi = 0 \quad \text{(Burgers 方程式)}$$

(Burgers 方程式は線形化可能な可積分系である：$\phi = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\log\tau \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial\,\tau}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2\tau}{\partial x_1^2} = \gamma(x_2)\tau$)

iii)　ϕ, ϕ^* による binary Darboux 変換を用いて：$\tau_{x_1} = \tau\,\Omega$　　$\Rightarrow$　$u = 2\phi\phi^*$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + u\,\phi = 0 \\ &\frac{\partial\phi^*}{\partial x_2} - \frac{\partial^2\phi^*}{\partial x_1^2} - u\,\phi^* = 0 \end{aligned}\right. \quad \stackrel{red.}{\Longrightarrow} \quad \left\{\begin{aligned} i\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + 2\phi^2\phi^* = 0 \\ -i\frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \frac{\partial^2\phi^*}{\partial x_1^2} + 2\phi{\phi^*}^2 = 0 \end{aligned}\right. \quad \text{NLS 方程式 } (t = ix_2, x = x_1)$$