

DISDDG2010

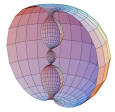
Darboux 変換入門

– 2次元戸田格子を中心として –

ウィロックス ラルフ (東京大学大学院数理科学研究科)

九州大学産業技術数理研究センター ワークショップ
離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル

九州大学大学院数理学研究院 2010年2月23日

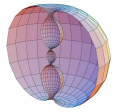


DISDDG2010

Darboux 変換 : Bäcklund 変換に Lax 形式の変換を加えたもの

G. Darboux の 1889 年に出版された本に初登場.

1950 年代 : Crum + Krein (Sturm-Liouville と Dirichlet 作用素関係で) 再発見.

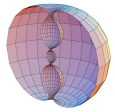


Darboux 変換 : Bäcklund 変換に Lax 形式の変換を加えたもの

G. Darboux の 1889 年に出版された本に初登場.

1950 年代 : Crum + Krein (Sturm-Liouville と Dirichlet 作用素関係で) 再発見.

- 幾何的な意味 : (Darboux) conjugate nets の間の変換 → 離散幾何学
- 代数的な意味 : 可積分系の特殊解を構築し, 解の代数的な構造を解明する.
- 解析的な意味 : 自己共役作用素のスペクトルに束縛状態を加える変換.

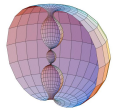


Darboux 変換 : Bäcklund 変換に Lax 形式の変換を加えたもの

G. Darboux の 1889 年に出版された本に初登場.

1950 年代 : Crum + Krein (Sturm-Liouville と Dirichlet 作用素関係で) 再発見.

- 幾何的な意味 : (Darboux) conjugate nets の間の変換 → 離散幾何学
 - 代数的な意味 : 可積分系の特殊解を構築し, 解の代数的な構造を解明する.
 - 解析的な意味 : 自己共役作用素のスペクトルに束縛状態を加える変換.
-
- 2次元戸田格子における Darboux 変換と binary Darboux 変換
 - Darboux 変換から得られる可積分系の離散化
 - 広田・三輪方程式における Darboux 変換と binary Darboux 変換
 - 広田・三輪方程式の連続極限 : KP 方程式とその 1+1 次元可積分系への簡約化



復習：2次元戸田格子 (2DToda)

$$\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$$

$$r_n := \log \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}$$

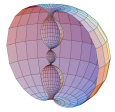
$$\frac{\partial^2 r_n}{\partial_x \partial_y} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n-1}}$$

Bäcklund 変換： $\tau_n \mapsto \bar{\tau}_n$,
$$\begin{cases} D_y \tau_n \cdot \bar{\tau}_n = \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \\ D_x \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \end{cases}$$

この変換により, $\tau_n \equiv 1$ から, Casorati 行列式の形で解が作れる. さらに,

$$\psi_{n+1} := \frac{\bar{\tau}_n}{\tau_n}$$

を導入し, 2次元戸田格子の Lax 形式も得られる.



固有関数の Gauge 変換 : $\phi_n := \lambda_1^{-n-1} e^{\lambda_3 x - \lambda_2 y} \psi_{n+1}$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \phi_n = v_n \phi_n + \phi_{n+1} \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi_n = -e^{r_n} \phi_{n-1} \end{cases}$$

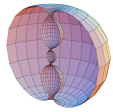
$$v_n(x, y) := \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \quad (\equiv -I_{n+1}), \quad r_n = \log \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}$$

両立条件 : $\forall n \in \mathbb{Z} : \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_n \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \phi_n \right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} (v_n \phi_n + \phi_{n+1}) = \frac{\partial}{\partial x} (-e^{r_n} \phi_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} v_n = e^{r_{n+1}} - e^{r_n} \\ \frac{\partial}{\partial x} r_n = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial y} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n-1}}$$



Bäcklund 変換 :

$$\tau_n \mapsto \tilde{\tau}_n := \tau_n \phi_n$$

Q.: $\tilde{v}_n(x, y) := \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tilde{\tau}_{n+1}}{\tilde{\tau}_n}$, $\tilde{r}_n = \log \frac{\tilde{\tau}_{n+1} \tilde{\tau}_{n-1}}{\tilde{\tau}_n^2}$ に対応する固有関数は？

τ_n に対応する作用素 $(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n)$ について, 次の因子分解を考えよう.

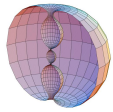
(S_n は変数 n に対する shift 作用素である : $S_n : n \mapsto n + 1$)

ある g_n に対して :

$$(S_n - g_n) \left(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{v}_n - S_n \right) (S_n - g_n)$$

$$\Leftrightarrow (g_n - v_{n+1}) S_n + g_n v_n \equiv (g_{n+1} - \tilde{v}_n) S_n + \tilde{v}_n g_n - \frac{\partial g_n}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{v}_n = v_{n+1} + g_{n+1} - g_n = v_n + \frac{\partial}{\partial x} \log g_n$$



Bäcklund 変換 :

$$\tau_n \mapsto \tilde{\tau}_n := \tau_n \phi_n$$

Q.: $\tilde{v}_n(x, y) := \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tilde{\tau}_{n+1}}{\tilde{\tau}_n}$, $\tilde{r}_n = \log \frac{\tilde{\tau}_{n+1} \tilde{\tau}_{n-1}}{\tilde{\tau}_n^2}$ に対応する固有関数は？

τ_n に対応する作用素 $(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n)$ について, 次の因子分解を考えよう.

(S_n は変数 n に対する shift 作用素である : $S_n : n \mapsto n + 1$)

ある g_n に対して :

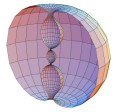
$$(S_n - g_n) \left(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n \right) \varphi_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{v}_n - S_n \right) (S_n - g_n) \varphi_n + \gamma(n, x, y) \varphi_n$$

しかし, $g_n := \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$ を, $\varphi_n \in \text{Ker}(S_n - g_n)$ となるように定義し, さらに, φ_n を

$\varphi_n \in \text{Ker}(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n)$ となるように選ぶと, $\gamma(n, x, y) \equiv 0$ であり,

$$(S_n - g_n) \left(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{v}_n - S_n \right) (S_n - g_n)$$

が成立する.



同様に, $\varphi_n \in \text{Ker}\left(\frac{\partial}{\partial y} + e^{r_n} S_n^{-1}\right)$ とすると,

$$\begin{aligned} (S_n - g_n) \left(\frac{\partial}{\partial y} + e^{r_n} S_n^{-1}\right) &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial y} + e^{\tilde{r}_n} S_n^{-1}\right) (S_n - g_n) \\ \Leftrightarrow \tilde{r}_n &= r_n + \log \frac{g_n}{g_{n-1}} \equiv r_n + \log \frac{\varphi_{n+1} \varphi_{n-1}}{\varphi_n^2} \end{aligned}$$

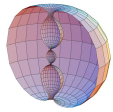
が成り立つ.

ちなみに, 上述の因子分解による $\tilde{v}_n = v_n + \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$, $\tilde{r}_n = r_n + \log \frac{\varphi_{n+1} \varphi_{n-1}}{\varphi_n^2}$

は, Bäcklund 変換 $\tau_n \mapsto \tilde{\tau}_n = \tau_n \varphi_n$ から得られた変換式と等しい,

$$\begin{cases} v_n \mapsto \tilde{v}_n = v_n + \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \\ r_n \mapsto \tilde{r}_n = r_n + \log \frac{\varphi_{n+1} \varphi_{n-1}}{\varphi_n^2} \end{cases}$$

$\varphi_n \in \text{Ker}\left(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n\right) \cap \text{Ker}\left(\frac{\partial}{\partial y} + e^{r_n} S_n^{-1}\right)$ は, 明らかに, φ_n が τ_n に対応する固有関数であることを意味する条件である.



τ_n に対する固有関数, つまり $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n = v_n \varphi_n + \varphi_{n+1} \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi_n = -e^{r_n} \varphi_{n-1} \end{cases}$ を満たす

定理:

関数 φ_n を用いて, $\tilde{\tau}_n$ を $\tau_n \mapsto \tilde{\tau}_n := \tau_n \varphi_n$ で定めるとき, 関数

$$\tilde{\phi}_n := (S_n - g_n) \phi_n \equiv \phi_{n+1} - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \phi_n$$

は $\tilde{\tau}_n$ に対する固有関数である.

ただし, ϕ_n は元の τ_n に対する固有関数である.

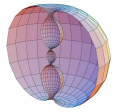
証明:

$$\text{i) } \left(\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{v}_n - S_n \right) \tilde{\phi}_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{v}_n - S_n \right) (S_n - g_n) \phi_n = (S_n - g_n) \left(\frac{\partial}{\partial x} - v_n - S_n \right) \phi_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\phi}_n = \tilde{v}_n \tilde{\phi}_n + \tilde{\phi}_{n+1}$$

$$\text{ii) } \left(\frac{\partial}{\partial y} + e^{\tilde{r}_n} S_n^{-1} \right) \tilde{\phi}_n = \left(\frac{\partial}{\partial y} + e^{\tilde{r}_n} S_n^{-1} \right) (S_n - g_n) \phi_n = (S_n - g_n) \left(\frac{\partial}{\partial y} + e^{r_n} S_n^{-1} \right) \phi_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\phi}_n = -e^{\tilde{r}_n} \tilde{\phi}_{n-1}$$



Darboux 変換 :

φ_n を τ_n に対する固有関数とする. そのとき, 下記の変換を「Darboux 変換」と呼ぶ.

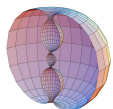
$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_n \mapsto \tilde{\tau}_n := \tau_n \varphi_n \\ \phi_n \mapsto \tilde{\phi}_n := \phi_{n+1} - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \phi_n \end{array} \right.$$

性質 :

$$i) \quad \tilde{\phi}_n \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) \phi_n \quad \left(\frac{1}{\varphi_n} \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} \varphi_n - \phi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) \equiv \frac{1}{\varphi_n} (\phi_{n+1} \varphi_n - \phi_n \varphi_{n+1}) \right)$$

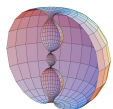
ii) τ_n に対する固有関数 $\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \varphi_n^{(3)}$ を用意し, Darboux 変換の反復を考えよう.

$$\begin{array}{l} \tau_n \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} \tilde{\tau}_n := \tau_n \varphi_n^{(1)} \xrightarrow{\varphi_n^{(2)}} \widetilde{\tilde{\tau}}_n := \tilde{\tau}_n \widetilde{\varphi_n^{(2)}} \equiv \tau_n (\varphi_{n+1}^{(2)} \varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)} \varphi_{n+1}^{(1)}) \\ \varphi_n^{(2)} \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} \widetilde{\varphi_n^{(2)}} := \varphi_{n+1}^{(2)} - \frac{\varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_n^{(1)}} \varphi_n^{(2)} \quad \widetilde{\widetilde{\varphi_n^{(3)}}} := (\widetilde{\varphi_{n+1}^{(3)}} \widetilde{\varphi_n^{(2)}} - \widetilde{\varphi_n^{(3)}} \widetilde{\varphi_{n+1}^{(2)}}) / \widetilde{\varphi_n^{(2)}} : ? \\ \varphi_n^{(3)} \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} \widetilde{\varphi_n^{(3)}} := \varphi_{n+1}^{(3)} - \frac{\varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_n^{(1)}} \varphi_n^{(3)} \end{array}$$



a) $\varphi_{n+1}^{(2)}\varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)}\varphi_{n+1}^{(1)} \equiv \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} : 2 \text{次 Casorati 行列式.}$

b)
$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_n^{(3)}} &= \widetilde{\varphi_{n+1}^{(3)}\varphi_n^{(2)} - \varphi_n^{(3)}\varphi_{n+1}^{(2)}} / \widetilde{\varphi_n^{(2)}} \\ &= \left(S_n - \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{n+1}^{(1)} & \varphi_{n+2}^{(1)} \\ \varphi_{n+1}^{(2)} & \varphi_{n+2}^{(2)} \end{vmatrix} \varphi_n^{(1)}}{\begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \varphi_{n+1}^{(1)}} \right) \frac{\begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(3)} & \varphi_{n+1}^{(3)} \end{vmatrix}}{\varphi_n^{(1)}} \\ &= \frac{1}{\varphi_{n+1}^{(1)} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}} \left(\begin{vmatrix} \varphi_{n+1}^{(1)} & \varphi_{n+2}^{(1)} \\ \varphi_{n+1}^{(3)} & \varphi_{n+2}^{(3)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_{n+1}^{(1)} & \varphi_{n+2}^{(1)} \\ \varphi_{n+1}^{(2)} & \varphi_{n+2}^{(2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(3)} & \varphi_{n+1}^{(3)} \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\cancel{\varphi_{n+1}^{(1)}} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}} \left(\cancel{\varphi_{n+1}^{(1)}} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} & \varphi_{n+2}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} & \varphi_{n+2}^{(2)} \\ \varphi_n^{(3)} & \varphi_{n+1}^{(3)} & \varphi_{n+2}^{(3)} \end{vmatrix} \right) \quad (\text{Jacobi の公式}) \end{aligned}$$

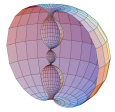


$$\text{a) } \varphi_{n+1}^{(2)} \varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)} \varphi_{n+1}^{(1)} \equiv \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} : \text{2次 Casorati 行列式.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \widetilde{\varphi_n^{(3)}} &= \widetilde{\varphi_{n+1}^{(3)} \varphi_n^{(2)}} - \widetilde{\varphi_n^{(3)} \varphi_{n+1}^{(2)}} / \widetilde{\varphi_n^{(2)}} \\ &= \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} & \varphi_{n+2}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} & \varphi_{n+2}^{(2)} \\ \varphi_n^{(3)} & \varphi_{n+1}^{(3)} & \varphi_{n+2}^{(3)} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

従って, Darboux 変換を繰り返すて, 2次元戸田格子の Casorati 行列式として表現できる解は自然に現れる.

$$\tau_n \mapsto \tau_n \varphi_n^{(1)} \mapsto \tau_n \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \mapsto \tau_n \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} & \varphi_{n+2}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} & \varphi_{n+2}^{(2)} \\ \varphi_n^{(3)} & \varphi_{n+1}^{(3)} & \varphi_{n+2}^{(3)} \end{vmatrix}$$



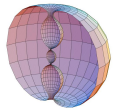
特に $\tau_n \equiv 1$ の場合, $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n^{(i)} = \varphi_{n+1}^{(i)} \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi_n^{(i)} = -\varphi_{n-1}^{(i)} \end{cases}$ を用いて, Darboux 変換を N 回繰り返すと,

次の N 次 Casorati 行列式解が得られる.

$$\tau_n^{(N)} = \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^{(N)} & \varphi_{n+1}^{(N)} & \cdots & \varphi_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix}$$

このような τ_n は Wronski 行列式としても表せる.

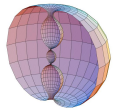
$$\tau_n^{(N)} \equiv \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n^{(1)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} \varphi_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n^{(2)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} \varphi_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^{(N)} & \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n^{(N)} & \cdots & \frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} \varphi_n^{(N)} \end{vmatrix}$$



性質：

iii) Darboux 変換は可換である.

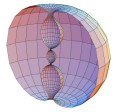
$$\begin{array}{ccc} \tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} \downarrow & & \downarrow \left| \begin{array}{cc} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{array} \right| / \varphi_n^{(1)} \\ \tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(2)} & & \tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \left| \begin{array}{cc} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{array} \right| \end{array}$$



性質：

iii) Darboux 変換は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} \downarrow & & \downarrow \left| \begin{array}{cc} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{array} \right| / \varphi_n^{(1)} \\ \tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(2)} & \xrightarrow{\quad} & -\tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \left| \begin{array}{cc} \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \\ \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \end{array} \right| \end{array}$$



性質：

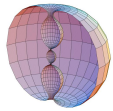
iii) Darboux 変換は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 \tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(1)} \\
 \varphi_n^{(2)} \downarrow & & \downarrow \left| \begin{array}{cc} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{array} \right| / \varphi_n^{(1)} \\
 \tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(2)} & \xrightarrow{(\sim \tau_n / \mathbb{C})} & \tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \left| \begin{array}{cc} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{array} \right|
 \end{array}$$

しかし, $\frac{1}{2} D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$ は $\tau_n \mapsto -\tau_n$ の下で不変であり, 2次元戸田格子の τ 関数を次のような同値類として解釈すると,

$$\tau_n \sim \tau_N / \mathbb{C}$$

上記の「Bianchi diagram」と呼ばれている可換な図式が成立する.



2次元戸田格子の簡約 (その1)

a) 1DToda: $t = x + y, s = x - y$; $\forall n : \frac{\partial}{\partial s} \tau_n = c \tau_n \quad (c \in \mathbb{C}) \quad (\Rightarrow \frac{\partial r_n}{\partial s} \equiv 0)$

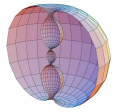
$\frac{1}{2} D_t^2 \tau_n \cdot \tau_n = \tau_{n+1} \tau_{n-1} - \tau_n^2$ の Lax 形式 : $\begin{cases} (S_n + v_n + e^{r_n} S_n^{-1}) \phi_n = \lambda \phi_n \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi_n = -e^{r_n} \phi_{n-1} \end{cases}$

または,

b) sinh-Gordon 方程式: $\tau_n = \tau_{n \bmod 2}, \phi_n = \lambda^n \phi_{n \bmod 2}$

$\begin{cases} \frac{1}{2} D_x D_y \tau_0 \cdot \tau_0 = \tau_1^2 - \tau_0^2 \\ \frac{1}{2} D_x D_y \tau_1 \cdot \tau_1 = \tau_0^2 - \tau_1^2 \end{cases}$ の Lax 形式 : $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & \lambda \\ \lambda & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & e^{r_0} \\ e^{r_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \end{cases}$

は 2DToda の Darboux 変換の下で covariant である。(形は不変であるが, ポテンシャルは変わる。) 即ち, 上述の簡約条件は元の可積分系の Darboux 変換に不変に保たれている。



Darboux 変換 : $\tau_n \mapsto \tilde{\tau}_n = \tau_n \varphi_n$ は τ 関数の間の写像である。

Q.: $\tilde{\tau}_n \mapsto \tau_n = \tilde{\tau}_n \frac{1}{\varphi_n}$ の写像は Darboux 変換となるのか？

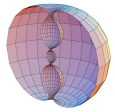
A.: 2DToda の Bäcklund 変換において,

$$\begin{cases} D_y \tau_n \cdot \bar{\tau}_n = \lambda_1 \tau_{n+1} \bar{\tau}_{n-1} - \lambda_2 \tau_n \bar{\tau}_n \\ D_x \tau_{n+1} \cdot \bar{\tau}_n = -\frac{1}{\lambda_1} \tau_n \bar{\tau}_{n+1} + \lambda_3 \tau_{n+1} \bar{\tau}_n \end{cases}$$

$\psi_{n+1} := \frac{\bar{\tau}_n}{\tau_n}$ ではなく, $\phi_n^* := \frac{\tau_n}{\bar{\tau}_n}$ を導入すると, 2DToda の

随伴 (adjoint) Lax 形式が得られる. (両立条件 = 2DToda)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \phi_n^* = -\left(v_{n-1} \phi_n^* + \phi_{n-1}^* \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi_n^* = e^{r_n} \phi_{n+1}^* \end{cases}$$



Darboux 変換 : $\tau_n \mapsto \tilde{\tau}_n = \tau_n \varphi_n$ は τ 関数の間の写像である。

Q.: $\tilde{\tau}_n \mapsto \tau_n = \tilde{\tau}_n \frac{1}{\varphi_n}$ の写像は Darboux 変換となるのか？

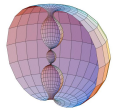
φ_n が τ_n に対する固有関数であるとき, $\frac{1}{\varphi_n}$ が $\tilde{\tau}_n (\equiv \tau_n \varphi_n)$ に対する随伴 Lax 形式を満たす.

定理 :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varphi_n} \right) = - \left(\tilde{v}_{n-1} \frac{1}{\varphi_n} + \frac{1}{\varphi_{n-1}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varphi_n} \right) = e^{\tilde{r}_n} \frac{1}{\varphi_{n+1}} \end{cases}$$

つまり, $\tilde{\tau}_n \mapsto \tau_n$ は随伴 Lax 形式の固有関数による Darboux 変換である.

$$\begin{array}{ccc} \tau_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_n} \\ \xleftarrow{\tilde{\varphi}_n^*} \end{array} & \tilde{\tau}_n \end{array}$$

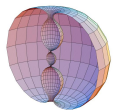


Binary Darboux 変換

Bianchi 図式:

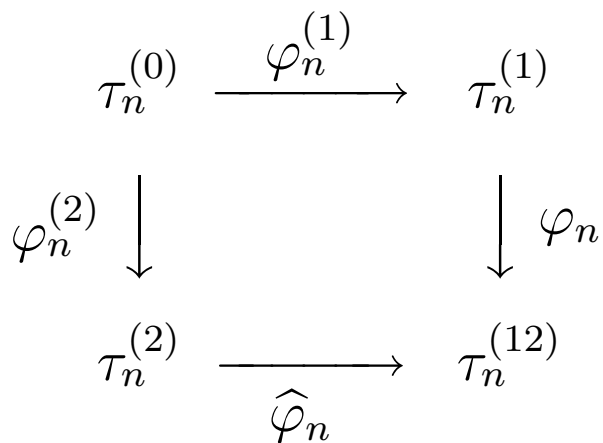
$$\begin{array}{ccc} \tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\varphi_n^{(1)}} & \tau_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} \downarrow & & \downarrow \varphi_n \\ \tau_n^{(2)} & \xrightarrow{\hat{\varphi}_n} & \tau_n^{(12)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_n^{(1)}} \right) \varphi_n^{(2)} \\ \varphi_n^{(2)} \hat{\varphi}_n \equiv \varphi_n^{(1)} \varphi_n \end{array} \right.$$



Binary Darboux 変換

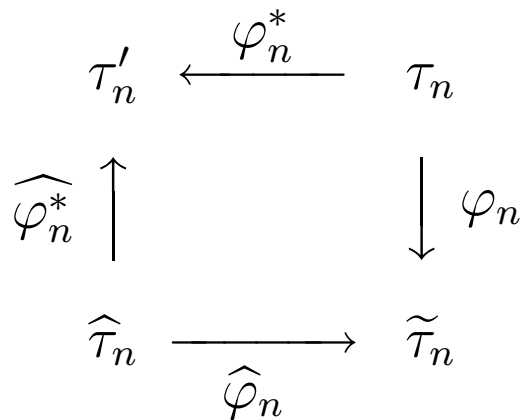
Bianchi 図式:



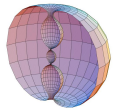
$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi_{n+1}^{(1)}}{\varphi_n^{(1)}} \right) \varphi_n^{(2)} \\
 \varphi_n^{(2)} \widehat{\varphi}_n \equiv \varphi_n^{(1)} \varphi_n
 \end{array} \right.$$



$$\left. \begin{array}{l}
 \varphi_n^* := \frac{1}{\varphi_n^{(1)}} \\
 \widehat{\varphi}_n^* := \frac{1}{\varphi_n^{(2)}}
 \end{array} \right\}$$



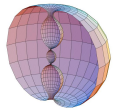
$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi_n^*}{\varphi_{n+1}^*} \right) \frac{1}{\varphi_n^*} \\
 \widehat{\varphi}_n \equiv \frac{\widehat{\varphi}_n^*}{\varphi_n^*} \varphi_n
 \end{array} \right.$$



固有関数ポテンシャル：

$$\begin{array}{ccc} \tau'_n & \xleftarrow{\varphi_n^*} & \tau_n \\ \widehat{\varphi}_n^* \uparrow & & \downarrow \varphi_n \\ \widehat{\tau}_n & \xrightarrow[\widehat{\varphi}_n]{} & \widetilde{\tau}_n \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi_n^*}{\varphi_{n+1}^*} \right) \frac{1}{\varphi_n^*} \\ \widehat{\varphi}_n \equiv \frac{\widehat{\varphi}_n^*}{\varphi_n^*} \varphi_n \end{array} \right.$$

i) $\Rightarrow (S_n - 1) \left(\frac{\widehat{\varphi}_n^*}{\varphi_n^*} \right) = \varphi_n \varphi_{n+1}^*$



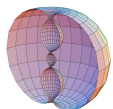
固有関数ポテンシアル：

$$\begin{array}{ccc}
 \tau'_n & \xleftarrow{\varphi_n^*} & \tau_n \\
 \widehat{\varphi}_n^* \uparrow & & \downarrow \varphi_n \\
 \widehat{\tau}_n & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_n} & \widetilde{\tau}_n
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \varphi_n := \left(S_n - \frac{\varphi_n^*}{\varphi_{n+1}^*} \right) \frac{1}{\varphi_n^*} \\
 \widehat{\varphi}_n \equiv \frac{\widehat{\varphi}_n^*}{\varphi_n^*} \varphi_n
 \end{array} \right.$$

$$\text{i) } \quad \implies \quad (S_n - 1) \left(\frac{\widehat{\varphi}_n^*}{\varphi_n^*} \right) = \varphi_n \varphi_{n+1}^*$$

$$\text{ii) } \quad \underline{\text{定義：}} \quad \boxed{\Omega_n := \frac{\varphi_n^*}{\widehat{\varphi}_n^*}} \quad \implies \quad \Delta_n \Omega_n = \varphi_n \varphi_{n+1}^*, \quad \Delta_n := (S_n - 1)$$

$$\widehat{\tau}_n \widehat{\varphi}_n = \widetilde{\tau}_n = \tau_n \varphi_n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\widehat{\tau}_n = \tau_n \Omega_n}$$



$$\Omega_n \text{ に対し, } \Delta_n \Omega_n = \varphi_n \varphi_{n+1}^*, \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial x} = \varphi_n \varphi_n^*, \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial y} = e^{r_n} \varphi_{n-1} \varphi_{n+1}^*$$

とおくと, 次の関係式が成り立つ.

定理:

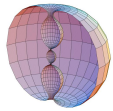
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_n \Omega_n) &\equiv \Delta_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \Omega_n \right), & \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_n \Omega_n) &\equiv \Delta_n \left(\frac{\partial}{\partial y} \Omega_n \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Omega_n \right) &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Omega_n \right), \end{aligned}$$

証明:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Delta_n \Omega_n) = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_n \varphi_{n+1}^*) = \varphi_{n+1} \varphi_{n+1}^* - \varphi_n \varphi_n^* = \Delta_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \Omega_n \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\Delta_n \Omega_n) = \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_n \varphi_{n+1}^*) = -e^{r_n} \varphi_{n-1} \varphi_{n+1}^* + e^{r_{n+1}} \varphi_n \varphi_{n+2}^* = \Delta_n \left(\frac{\partial}{\partial y} \Omega_n \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Omega_n \right) = \frac{\partial}{\partial x} (e^{r_n} \varphi_{n-1} \varphi_{n+1}^*) = e^{r_n} (\varphi_n \varphi_{n+1}^* - \varphi_{n-1} \varphi_n^*) = \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_n \varphi_n^*) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Omega_n \right)$$



$$\Omega_n \text{ に対し, } \Delta_n \Omega_n = \varphi_n \varphi_{n+1}^*, \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial x} = \varphi_n \varphi_n^*, \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial y} = e^{r_n} \varphi_{n-1} \varphi_{n+1}^*$$

とおくと, 次の関係式が成り立つ.

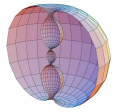
定理:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_n \Omega_n) &\equiv \Delta_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \Omega_n \right), & \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_n \Omega_n) &\equiv \Delta_n \left(\frac{\partial}{\partial y} \Omega_n \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Omega_n \right) &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Omega_n \right), \end{aligned}$$

系:

$\Delta_n \Omega = \varphi_n \varphi_{n+1}^*, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \varphi_n \varphi_n^*, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = e^{r_n} \varphi_{n-1} \varphi_{n+1}^*$ を満たす関数 $\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$ が存在する. その関数を「固有関数ポテンシャル」と呼ぶ.

具体的に: $\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) = c + \sum_{k=-\infty}^{n-1} \varphi_k \varphi_{k+1}^*$ または, $c + \int_{-\infty}^x \varphi_n \varphi_n^* dx, \dots$ (c は積分定数)

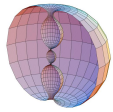


例 : $\tau_n = 1$ のとき,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n = \varphi_{n+1}, \frac{\partial}{\partial y} \varphi_n = -\varphi_{n-1} \Rightarrow \varphi_n \sim p^n \exp(px - y/p) \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi_n^* = -\varphi_{n-1}^*, \frac{\partial}{\partial y} \varphi_n^* = \varphi_{n+1}^* \Rightarrow \varphi_n \sim q^{-n} \exp(-qx + y/q) \end{cases}$$

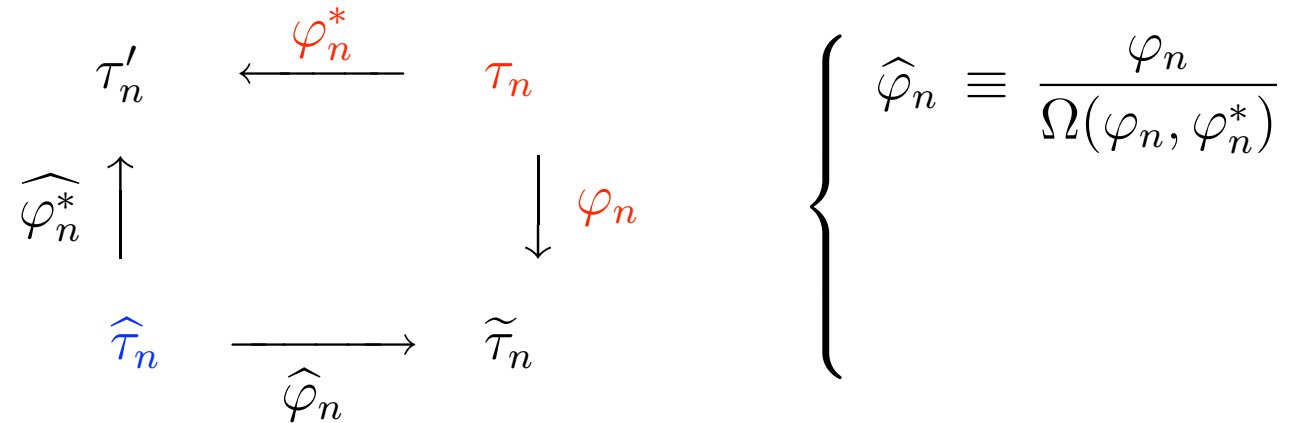
従って,
$$\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) = c + \frac{1}{p - q} \left(\frac{p}{q} \right)^n \exp \left((p - q) \left(x + \frac{y}{pq} \right) \right)$$

$$\left(\Delta_n \Omega = \varphi_n \varphi_{n+1}^*, \frac{\partial}{\partial x} \Omega = \varphi_n \varphi_n^*, \frac{\partial}{\partial y} \Omega = \varphi_{n-1} \varphi_{n+1}^* \right)$$



Binary Darboux 変換:

$$\tau_n \mapsto \widehat{\tau}_n := \tau_n \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$$



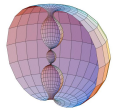
※ $\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$ は, 積分定数を除いて,

$$\Delta_n \Omega_n = \varphi_n \varphi_{n+1}^*, \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial x} = \varphi_n \varphi_n^*, \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial y} = e^{r_n} \varphi_{n-1} \varphi_{n+1}^*$$

によって一意的に定められているものであるが, 積分定数の自由度を利用すると,

$$\text{任意の定数 } c \text{ に対して, } \widehat{\tau}_n + c \tau_n \text{ は 2DToda の } \tau \text{ 関数である}$$

のような不思議な重ね合わせの原理があることが分かる.



Binary Darboux 変換:

$$\tau_n \mapsto \widehat{\tau}_n := \tau_n \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$$

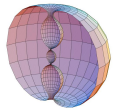
$$\begin{array}{ccc} \tau'_n & \xleftarrow{\varphi_n^*} & \tau_n, \phi_n \\ \widehat{\varphi}_n^* \uparrow & & \downarrow \varphi_n \\ \widehat{\phi}, \widehat{\tau}_n & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_n} & \widetilde{\tau}_n, \widetilde{\phi}_n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\varphi}_n \equiv \frac{\varphi_n}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \\ (S_n - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n})\phi_n = \widetilde{\phi}_n \\ = (S_n - \frac{\widehat{\varphi}_{n+1}}{\widehat{\varphi}_n})\widehat{\phi}_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \phi_{n+1} - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \phi_n \equiv \widehat{\phi}_{n+1} - \frac{\widehat{\varphi}_{n+1}}{\widehat{\varphi}_n} \widehat{\phi}_n = \widehat{\phi}_{n+1} - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \frac{\Omega_n}{\Omega_{n+1}} \widehat{\phi}_n$$

$$\Leftrightarrow S_n \left[\frac{\Omega_n}{\varphi_n} (\phi_n - \widehat{\phi}_n) \right] = \frac{1}{\varphi_n} \left[\Omega_n (\phi_n - \widehat{\phi}_n) + \phi_n (S_n - 1) (\Omega_n) \right]$$

$$\Leftrightarrow \Delta_n \left[\frac{\Omega_n}{\varphi_n} (\phi_n - \widehat{\phi}_n) \right] = \frac{\phi_n}{\varphi_n} \Delta_n \Omega_n \equiv \phi_n \varphi_{n+1}^* = \Delta_n \Omega(\phi_n, \varphi_{n+1}^*)$$

だから, $\Omega(\phi_n, \varphi_n^*)$ を導入すると, $\widehat{\phi}_n \equiv \phi_n - \frac{\Omega(\phi_n, \varphi_n^*)}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \varphi_n$ が得られる.

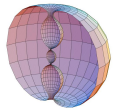


Binary Darboux 変換: $\tau_n \mapsto \hat{\tau}_n := \tau_n \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$

$$\begin{array}{ccc}
\tau'_n & \xleftarrow{\varphi_n^*} & \tau_n, \phi_n \\
\hat{\varphi}_n^* \uparrow & & \downarrow \varphi_n \\
\hat{\phi}, \hat{\tau}_n & \xrightarrow[\hat{\varphi}_n]{} & \tilde{\tau}_n, \tilde{\phi}_n
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\hat{\varphi}_n \equiv \frac{\varphi_n}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \\
(S_n - \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n})\phi_n = \tilde{\phi}_n \\
= (S_n - \frac{\hat{\varphi}_{n+1}}{\hat{\varphi}_n})\hat{\phi}_n
\end{array} \right.$$

τ 関数の変換 $\tau_n \mapsto \hat{\tau}_n := \tau_n \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$ に, 次の固有関数と随伴固有関数の変換を加えたものを「binary Darboux」変換と呼ぶ.

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_n &\equiv \phi_n - \frac{\Omega(\phi_n, \varphi_n^*)}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \varphi_n \\
\hat{\phi}_n^* &\equiv \phi_n^* - \frac{\Omega(\varphi_n, \phi_n^*)}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \varphi_n^*
\end{aligned}$$



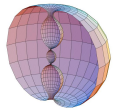
binary Darboux 変換の反復：

$\widehat{\tau}_N := \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$ に対する固有関数と随伴固有関数は次の形で与えられている。

$$\widehat{\phi}_n = \left| \begin{array}{cc} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \varphi_n \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \phi_n \end{array} \right| / \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*), \quad \widehat{\phi}_n^* = \left| \begin{array}{cc} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \varphi_n^* & \phi_n^* \end{array} \right| / \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$$

Q.: $\Omega(\widehat{\phi}_n, \widehat{\phi}_n^*)$ はどのような代数的な構造を持っているのか。

特に, binary Darboux 変換の反復によって構成できる τ 関数の構造は？



binary Darboux 変換の反復：

$\widehat{\tau}_N := \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)$ に対する固有関数と随伴固有関数は次の形で与えられている。

$$\widehat{\phi}_n = \frac{\begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \varphi_n \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \phi_n \end{vmatrix}}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}, \quad \widehat{\phi}_n^* = \frac{\begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \varphi_n^* & \phi_n^* \end{vmatrix}}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}$$

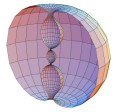
Q.: $\Omega(\widehat{\phi}_n, \widehat{\phi}_n^*)$ はどのような代数的な構造を持っているのか。

特に, binary Darboux 変換の反復によって構成できる τ 関数の構造は？

定理：

$$\Delta_n \left(\frac{\begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\phi_n, \phi_n^*) \end{vmatrix}}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \right) \equiv \widehat{\phi}_n \widehat{\phi}_{n+1}^*,$$

$$\text{つまり, } \Omega(\widehat{\phi}_n, \widehat{\phi}_n^*) \equiv \frac{\begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\phi_n, \phi_n^*) \end{vmatrix}}{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)}$$



binary Darboux 変換の反復：

従って、この固有関数ポテンシャルを用いて、 $\hat{\tau}_n$ から改めて新しい τ 関数ができる。

$$\tau_n \xrightarrow{\Omega(\varphi_n, \varphi_n^*)} \tau_n \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) \xrightarrow{\Omega(\hat{\phi}_n, \hat{\phi}_n^*)} \tau_n \begin{vmatrix} \Omega(\varphi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\varphi_n, \phi_n^*) \\ \Omega(\phi_n, \varphi_n^*) & \Omega(\phi_n, \phi_n^*) \end{vmatrix}$$

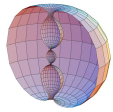
例えば、 $\tau_n \equiv 1$ から出発し、binary Darboux 変換を N 回繰り返すと、 N 次 Gram 行列式 (Grammian) で表せる τ 関数が得られる。

$$\tau_n^{(N)} = \left| \Omega(\varphi^{(i)}, \varphi^{*(j)}) \right|_{i,j=1..N}$$

$$(\varphi_n^{(i)} \sim p_i^n \exp(p_i x - y/p_i), \varphi_n^{*(j)} \sim q_j^n \exp(-q_j x + y/q_j))$$

この τ 関数に対する Lax 形式の解は次の形をとる。

$$\phi_n^{(N)} = \begin{vmatrix} \Omega(\varphi^{(1)}, \varphi^{*(1)}) & \dots & \Omega(\varphi^{(1)}, \varphi^{*(N)}) & \varphi^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Omega(\varphi^{(N)}, \varphi^{*(1)}) & \dots & \Omega(\varphi^{(N)}, \varphi^{*(N)}) & \varphi^{(N)} \\ \Omega(\varphi^{(N+1)}, \varphi^{*(1)}) & \dots & \Omega(\varphi^{(N+1)}, \varphi^{*(N)}) & \varphi^{(N+1)} \end{vmatrix} / \tau_n^{(N)}$$



2次元戸田格子の簡約 (その2: 格子の折り重ね)

普通の Darboux 変換の下で不変ではないのに, binary Darboux 変換の下で不変である簡約の一つとして, 次の例が知られている: $\tau_{-1-n} = \tau_n, \phi_n^* = (-1)^n \phi_{-1-n}$

その結果, $v_{-1-n} + v_{n-1} = 0, v_{-1} = 0, r_{-1-n} = r_n$ が成立し, B-型と呼ばれる2次元の(半無限) 戸田格子が得られる.

$$r_0 = \log \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad r_{n \geq 1} = \log \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}, \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 r_0}{\partial_x \partial_y} = e^{r_1} - 2e^{r_0} + e^{r_{-1}} \equiv e^{r_1} - e^{r_0} \\ \frac{\partial^2 r_n}{\partial_x \partial_y} = e^{r_{n+1}} - 2e^{r_n} + e^{r_{n-1}} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

さらに, 随伴 Lax 形式から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi_0^* &= -v_{-1} \phi_0^* - \phi_{-1}^* \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \phi_{-1} = \phi_0 \\ \Rightarrow \quad \Omega(\phi_0, \phi_0^*) &\equiv \Omega\left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_{-1}, \phi_{-1}\right) = \frac{1}{2} \phi_{-1}^2 + c \end{aligned}$$

が分かる.

B-型 2次元戸田格子の簡約

その結果, τ_0 が完全平方式になるような解も存在することが分かる.

例: $N = 1$: $\tau_0 = \frac{1}{2}\phi_{-1}^2$, $N = 2$: $\tau_0 = \left[\frac{1}{2} \int (\varphi_{-1}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{-1}^{(1)} - \varphi_{-1}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{-1}^{(2)}) dx \right]^2$

このような τ_0 の平方根は Pfaffian の代数的構造を持つ.

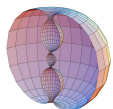
この B-型戸田格子に, さらに, 周期的な条件を課すと,

$$\begin{aligned} \tau_n &= \tau_{n \bmod 3}, \\ \text{特に: } \tau_2 &= \tau_{-1} \equiv \tau_0, \end{aligned}$$

微分幾何学においてよく知られている Tzitzeica 方程式が得られる.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} D_x D_y \tau_0 \cdot \tau_0 = \tau_1 \tau_0 - \tau_0^2 \\ \frac{1}{2} D_x D_y \tau_1 \cdot \tau_1 = \tau_0^2 - \tau_1^2 \end{cases},$$

$$r_0 = \log \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad r_1 = \log \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2} \equiv 2r_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 r_0}{\partial_x \partial_y} = e^{-2r_0} - e^{r_0}}$$

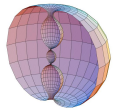


離散戸田格子

$$\begin{array}{ccc} \tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\varphi_n^{(1)} = \frac{\tau_n^{(1)}}{\tau_n^{(0)}}} & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} = \frac{\tau_n^{(2)}}{\tau_n^{(0)}} \downarrow & & \downarrow \\ \tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)} \varphi_n^{(2)} & \longrightarrow & \tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \begin{vmatrix} \varphi_n^{(1)} & \varphi_{n+1}^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} & \varphi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \end{array}$$

この Bianchi 図式に現れる τ 関数の間に双線形関係式が成り立つ.

$$\Leftrightarrow \tau_n^{(12)} = \frac{1}{\tau_{n+1}^{(0)}} (\tau_{n+1}^{(2)} \tau_n^{(1)} - \tau_{n+1}^{(1)} \tau_n^{(2)}) \Leftrightarrow \boxed{\tau_{n+1}^{(0)} \tau_n^{(12)} - \tau_n^{(1)} \tau_{n+1}^{(2)} + \tau_n^{(2)} \tau_{n+1}^{(1)} = 0}$$



離散戸田格子

$$\begin{array}{ccc}
\phi_n^{(0)}, \tau_n^{(0)} & \xrightarrow{\phi_n^{(1)} = \frac{\tau_n^{(1)}}{\tau_n^{(0)}}} & \tau_n^{(1)} = \tau_n^{(0)} \phi_n^{(1)} \\
\phi_n^{(2)} = \frac{\tau_n^{(2)}}{\tau_n^{(0)}} \downarrow & & \downarrow \\
\tau_n^{(2)} = \tau_n^{(0)} \phi_n^{(2)} & \longrightarrow & \tau_n^{(12)} = \tau_n^{(0)} \begin{vmatrix} \phi_n^{(1)} & \phi_{n+1}^{(1)} \\ \phi_n^{(2)} & \phi_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}
\end{array}$$

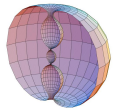
上記の Bianchi 図式に現れる τ 関数の間に双線形関係式が成り立つ.

$$\iff \tau_n^{(12)} = \frac{1}{\tau_{n+1}^{(0)}} (\tau_{n+1}^{(2)} \tau_n^{(1)} - \tau_{n+1}^{(1)} \tau_n^{(2)}) \iff \boxed{\tau_{n+1}^{(0)} \tau_n^{(12)} - \tau_n^{(1)} \tau_{n+1}^{(2)} + \tau_n^{(2)} \tau_{n+1}^{(1)} = 0}$$

この双線形形式は、実は、離散可積分系として解釈できるものである。そのために、まず、その可積分系の Lax 形式と見なされるものを導こう。

$$\text{i) } \phi_n^{(i)} \equiv \phi_{n+1}^{(0)} - \frac{\phi_{n+1}^{(i)} \phi_n^{(0)}}{\phi_n^{(i)}} = \phi_{n+1}^{(0)} - \frac{\tau_n^{(0)} \tau_{n+1}^{(i)}}{\tau_n^{(i)} \tau_{n+1}^{(0)}} \phi_n^{(0)} \iff \boxed{\phi_n^{(0)} = \frac{\tau_n^{(i)} \tau_{n+1}^{(0)}}{\tau_n^{(0)} \tau_{n+1}^{(i)}} (\phi_{n+1}^{(0)} - \phi_n^{(i)})}$$

$$\text{ii) } \phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)} = \phi_n^{(0)} \frac{\tau_n^{(1)} \tau_{n+1}^{(2)} - \tau_n^{(2)} \tau_{n+1}^{(1)}}{\tau_n^{(1)} \tau_n^{(2)} \tau_{n+1}^{(0)}} \tau_n^{(0)} \iff \boxed{\phi_n^{(0)} = \frac{\tau_n^{(1)} \tau_n^{(2)}}{\tau_n^{(0)} \tau_n^{(12)}} (\phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)})}$$



“離散戸田格子” ここで τ_n を 3次元の格子上的関数として解釈すると,

$$\tau(n, m_1, m_2) : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{C}$$

具体的に： $\tau_n^{(1)} = \tau(n, m_1 + 1, m_2), \quad \tau_n^{(2)} = \tau(n, m_1, m_2 + 1)$

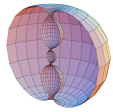
$\tau(n, m_1, m_2)$ が広田・三輪方程式を満たすことが分かる.

$$\tau(n+1)\tau(m_1+1, m_2+1) - \tau(m_1+1)\tau(n+1, m_2+1) + \tau(m_2+1)\tau(n+1, m_1+1) = 0$$

同様に, ϕ_n を \mathbb{Z}^3 上の関数として解釈すると, 広田・三輪方程式の Lax 形式が得られる.

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\tau(m_1+1)\tau(n+1)}{\tau\tau(n+1, m_1+1)} [\phi(n+1) - \phi(m_1+1)] \\ &= \frac{\tau(m_2+1)\tau(n+1)}{\tau\tau(n+1, m_2+1)} [\phi(n+1) - \phi(m_2+1)] \\ &= \frac{\tau(m_1+1)\tau(m_2+1)}{\tau\tau(m_1+1, m_2+1)} [\phi(m_1+1) - \phi(m_2+1)] \end{aligned}$$

(両立条件： $S_n(\phi(m_1+1, m_2+1)) = S_{m_1}(\phi(n+1, m_2+1)) = S_{m_2}(\phi(n+1, m_1+1))$ は広田・三輪)



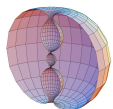
Gauge 変換 : $\tau \mapsto (c-b)^{nm_2}(c-a)^{nm_1}(a-b)^{m_1m_2}\tau$, $\phi \mapsto a^{m_1}b^{m_2}c^n\phi$
を行ってから, m_1, m_2, n を ℓ, m, n と書くと, 広田・三輪方程式の標準的な形が得られる.

$$\text{HM : } \boxed{\begin{aligned} (b-c)\tau(\ell+1)\tau(m+1, n+1) + (c-a)\tau(m+1)\tau(\ell+1, n+1) \\ + (a-b)\tau(n+1)\tau(\ell+1, m+1) = 0 \end{aligned}}$$

Lax 形式 : (HM 方程式と同様に巡回置換 $(\ell, a) \rightarrow (m, b) \rightarrow (n, c) \rightarrow (\ell, a)$ の対称性を持つ)

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{a-b} \frac{\tau(\ell+1)\tau(m+1)}{\tau\tau(\ell+1, m+1)} [a\phi(\ell+1) - b\phi(m+1)] \\ &= \frac{1}{b-c} \frac{\tau(m+1)\tau(n+1)}{\tau\tau(m+1, n+1)} [b\phi(m+1) - c\phi(n+1)] \\ &= \frac{1}{c-a} \frac{\tau(n+1)\tau(\ell+1)}{\tau\tau(\ell+1, n+1)} [c\phi(n+1) - a\phi(\ell+1)] \end{aligned}$$

上記の広田・三輪方程式は2次元戸田格子の可積分な離散化であるのが, KP 方程式の離散化でもある. それを後ほど説明する.



HM 方程式の Darboux / binary Darboux 変換

Darboux 変換 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \mapsto \tau \varphi \\ \phi \mapsto c(\phi(n+1) - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi} \phi) \end{array} \right. \quad (\varphi, \phi : \tau \text{ に対応する固有関数})$$

$$(\ast \quad c(\phi(n+1) - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi} \phi) = a(\phi(\ell+1) - \frac{\varphi(\ell+1)}{\varphi} \phi) = b(\phi(m+1) - \frac{\varphi(m+1)}{\varphi} \phi))$$

随伴 Lax 形式 :

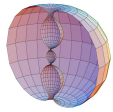
$$\Phi^*(\ell+1, m+1) = \frac{1}{a-b} \frac{\tau(\ell+1)\tau(m+1)}{\tau\tau(\ell+1, m+1)} [a\phi^*(m+1) - b\phi^*(\ell+1)]$$

$$\Phi^*(m+1, n+1) = \frac{1}{b-c} \frac{\tau(m+1)\tau(n+1)}{\tau\tau(m+1, n+1)} [b\phi^*(n+1) - c\phi^*(m+1)]$$

$$\Phi^*(\ell+1, n+1) = \frac{1}{c-a} \frac{\tau(\ell+1)\tau(n+1)}{\tau\tau(\ell+1, n+1)} [c\phi^*(\ell+1) - a\phi^*(n+1)]$$

adjoint Darboux 変換 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \mapsto \tau \varphi^* \\ \phi^* \mapsto c(\phi^*(n-1) - \frac{\varphi^*(n-1)}{\varphi^*} \phi^*) \end{array} \right.$$



HM 方程式の Darboux / binary Darboux 変換

Darboux 変換 :
$$\begin{cases} \tau \mapsto \tau \varphi \\ \phi \mapsto c(\phi(n+1) - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi} \phi) \end{cases} \quad (\varphi, \phi : \tau \text{ に対応する固有関数})$$

$$(\ast \quad c(\phi(n+1) - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi} \phi) = a(\phi(\ell+1) - \frac{\varphi(\ell+1)}{\varphi} \phi) = b(\phi(m+1) - \frac{\varphi(m+1)}{\varphi} \phi))$$

binary Darboux 変換 :

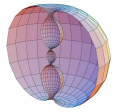
$\Omega(\varphi, \varphi^*)$ を定義し :
$$\Delta_n \Omega = \varphi S_n(\varphi^*), \quad \Delta_\ell \Omega = \varphi S_\ell(\varphi^*), \quad \Delta_m \Omega = \varphi S_m(\varphi^*)$$

$$(\Delta_n(\Delta_\ell \Omega) = \Delta_\ell(\Delta_n \Omega); \quad \Delta_n(\Delta_m \Omega) = \Delta_m(\Delta_n \Omega); \quad \Delta_m(\Delta_\ell \Omega) = \Delta_\ell(\Delta_m \Omega))$$

$$\begin{cases} \tau \mapsto \tau \Omega(\varphi, \varphi^*) \\ \phi \mapsto \phi - \frac{\Omega(\phi, \varphi^*)}{\Omega(\varphi, \varphi^*)} \varphi \\ \phi^* \mapsto \phi^* - \frac{\Omega(\varphi, \phi^*)}{\Omega(\varphi, \varphi^*)} \varphi^* \end{cases}$$

Proof:

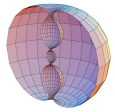
$$\begin{array}{ccc} \phi & \xrightarrow{\text{Darboux 変換}} & \tilde{\phi} \\ \text{元の Lax 形式} \downarrow & & \\ \phi^{(1)} & \xrightarrow{\text{Darboux 変換}} & \tilde{\phi}^{(1)} \end{array}$$



Proof:

$$\begin{array}{ccc} \phi & \xrightarrow{\text{Darboux 変換}} & \tilde{\phi} \\ \downarrow \text{元の Lax 形式} & & \downarrow \text{Darboux 変換} \equiv \text{Lax 形式} \\ \phi^{(1)} & \xrightarrow{\text{Darboux 変換}} & \tilde{\phi}^{(1)} \end{array}$$

しかし, 元の Lax 形式は実は Darboux 変換の作用を記述し, Darboux 変換の可換図式が成り立つので, $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\phi}^{(1)}$ の間にも Darboux 変換がある. 即ち, $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\phi}^{(1)}$ の間にも Lax 形式が成り立つ.



広田・三輪方程式の解

$\tau \equiv 1$ のとき, Lax 形式が簡単な分散関係式に帰着し, $\Delta_\ell \varphi = \Delta_m \varphi = \Delta_n \varphi$

($\Delta_\ell := a(S_\ell - 1)$, $\Delta_m := b(S_m - 1)$, $\Delta_n := c(S_n - 1)$)

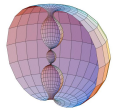
$$\varphi \sim \left(1 - \frac{p}{a}\right)^\ell \left(1 - \frac{p}{b}\right)^m \left(1 - \frac{p}{c}\right)^n$$

はその分散関係式の基本解である. ($\Delta_\ell \varphi = a(1 - \frac{p}{a} - 1)\varphi = -p\varphi = \Delta_m \varphi = \Delta_n \varphi$)

さらに, adjoint の Lax 形式から $a(1 - S_\ell^{-1})\varphi^* = b(1 - S_m^{-1})\varphi^* = c(1 - S_n^{-1})\varphi^*$

を得, このような分散関係式の随伴版の基本解を下記のものとする.

$$\varphi^* \sim \left(1 - \frac{q}{a}\right)^{-\ell} \left(1 - \frac{q}{b}\right)^{-m} \left(1 - \frac{q}{c}\right)^{-n}$$



広田・三輪方程式の解

Casorati 行列式解：

$$\tau = \begin{vmatrix} \varphi^{(1)} & \Delta_\ell \varphi^{(1)} & \dots & \Delta_\ell^{N-1} \varphi^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^{(N)} & \Delta_\ell \varphi^{(N)} & \dots & \Delta_\ell^{N-1} \varphi^{(N)} \end{vmatrix}$$

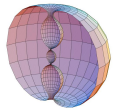
例： $\varphi^{(i)} = \left(1 - \frac{p_i}{a}\right)^\ell \left(1 - \frac{p_i}{b}\right)^m \left(1 - \frac{p_i}{c}\right)^n + \gamma_i \left(1 - \frac{p'_i}{a}\right)^\ell \left(1 - \frac{p'_i}{b}\right)^m \left(1 - \frac{p'_i}{c}\right)^n \rightarrow N \text{ ソリトン}$

Gram 行列式解：

$$\tau = \det \left(\Omega(\varphi^{(i)}, \varphi^{*(j)}) \right)_{i,j=1..N}$$

$$\Delta_\ell \Omega^{(i,j)} = \varphi^{(i)} S_\ell(\varphi^{*(j)}), \quad \Delta_m \Omega^{(i,j)} = \varphi^{(i)} S_m(\varphi^{*(j)}), \quad \Delta_n \Omega^{(i,j)} = \varphi^{(i)} S_n(\varphi^{*(j)})$$

例： $\Omega^{(i,j)} = C + \frac{1}{q_j - p_j} \left(\frac{a - p_i}{a - q_j}\right)^\ell \left(\frac{b - p_i}{b - q_j}\right)^m \left(\frac{c - p_i}{c - q_j}\right)^n \rightarrow N \text{ ソリトン}$



特殊関数解 : $a = z^{-1}, b = 1, c = 0$ を選び, 次の HM 方程式を考えよう.

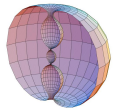
$$\tau(m+1)\tau(\ell+1, n+1) - z\tau(\ell+1)\tau(m+1, n+1) + (z-1)\tau(n+1)\tau(\ell+1, m+1) = 0$$

この方程式の Lax 形式を得るのに gauge 変換を施す必要がある : $\phi \mapsto (-c)^{-n}\phi$

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{z-1} \frac{\tau(\ell+1)\tau(m+1)}{\tau\tau(\ell+1, m+1)} [z\phi(m+1) - \phi(\ell+1)] \\ &= \frac{\tau(\ell+1)\tau(n+1)}{\tau\tau(\ell+1, n+1)} [\phi(\ell+1) + z\phi(n+1)] \\ &= \frac{\tau(m+1)\tau(n+1)}{\tau\tau(m+1, n+1)} [\phi(m+1) + \phi(n+1)]\end{aligned}$$

特に, $\tau \equiv 1$ の場合, $\boxed{z^{-1}[\phi - \phi(\ell+1)] = \phi - \phi(m+1) = \phi(n+1)}$ が得られる.

つまり, 基本解 $\varphi_\zeta \sim \zeta^n(1-\zeta)^m(1-z\zeta)^\ell$ から Casorati 行列式解が構成できる.



特殊関数解 : $a = z^{-1}, b = 1, c = 0$ を選び, 次の HM 方程式を考えよう.

$$\tau(m+1)\tau(\ell+1, n+1) - z\tau(\ell+1)\tau(m+1, n+1) + (z-1)\tau(n+1)\tau(\ell+1, m+1) = 0$$

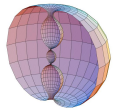
ちなみに, $\varphi_\zeta \sim \zeta^n(1-\zeta)^m(1-z\zeta)^\ell$ の任意の重ね合わせが分散関係式を満たすこと,
また, φ_ζ が次の超幾何関数 ${}_2F_1$ の積分表現に現れる被積分関数と等しいことに注意する.

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt \ t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a}.$$

従って, $\Phi := \int_0^1 \varphi_\zeta \zeta^{\beta-1} (1-\zeta)^{\gamma-\beta-1} (1-z\zeta)^{-\alpha} d\zeta$ のような重ね合わせにすると,

$$\tau(\ell, m, n) = \frac{\Gamma(n+\beta)\Gamma(m+\gamma-\beta)}{\Gamma(m+n+\gamma)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha-\ell, \beta+n \\ \gamma+m+n \end{matrix}; z\right)$$

が上記の HM 方程式を満たすことが分かる. さらに, Φ が持つパラメータ α, β, γ の自由度を利用すると, Φ を成分とする Casorati 行列式が解となることも明らかである.



連続極限 (その1)

$z = \delta^2$ と書き, $\boxed{\lambda = \ell, \mu = -m, \nu = n + \ell}$ の座標変換を施す.

$$\Rightarrow \tau(\lambda + 1, \nu + 1)\tau(\mu - 1, \nu - 1) - \delta^2\tau(\lambda + 1)\tau(\mu - 1) + (\delta^2 - 1)\tau\tau(\lambda + 1, \mu - 1) = 0$$

ここで, $\boxed{x = \frac{\mu}{\delta}, y = \frac{\lambda}{\delta}}$ と置き, $\delta \rightarrow \infty$ の極限をとると 2次元戸田格子が得られる.

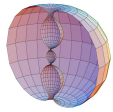
$$\tau(\nu + 1)\tau(\nu - 1) + \frac{\partial\tau}{\partial x} \frac{\partial\tau}{\partial y} - \tau \frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y} - \tau^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}D_x D_y \tau \cdot \tau = \tau(\nu + 1)\tau(\nu - 1) - \tau^2$$

Lax 形式の連続極限をとる前に, $\phi \mapsto \delta^{-\nu}(-\delta^2)^\lambda \phi$ を施す必要がある.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\tau(\nu+1)}{\tau} \right) \phi + \phi(\nu + 1), \quad \frac{\partial}{\partial y} \phi = -\frac{\tau(\nu+1)\tau(\nu-1)}{\tau^2} \phi(\nu - 1)$$

特に $\tau \equiv 1$ のとき, $\phi \sim \underbrace{(\zeta\delta)^\nu (1 - \zeta)^{-x\delta} \left(1 - \frac{1}{\delta^2\zeta}\right)^{y\delta}}_{\zeta=\eta/\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} \underline{\eta^\nu e^{\eta x - y/\eta}}$



2DToda の特殊解 :

$$\frac{1}{2}D_x D_y \tau \cdot \tau = \tau(\nu + 1)\tau(\nu - 1) - \tau^2$$

この基本解 $\varphi_\eta = \eta^\nu e^{\eta x - y/\eta}$ に対して, 次の重ね合わせを考えよう.

$$\Phi := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \eta^{-1-s} \varphi_\eta d\eta \quad (xy > 0)$$

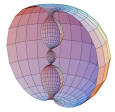
ここで $\eta = t \sqrt{\frac{y}{x}}$ とし, Bessel 関数 $J_s(z)$ の積分表現と比較する.

$$J_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-1-s} e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} dt \quad (z > 0)$$

つまり, 関数 $\Phi^{(s)}$ とそれらを成分とする Casorati 行列が 2DToda の解である.

$$\Phi^{(s)} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu-s}{2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{\nu-s-1} e^{\sqrt{xy}(t - \frac{1}{t})} dt \right]$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{(s)}(\nu; x, y) \equiv \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu-s}{2}} J_{s-\nu}(2\sqrt{xy})$$



HM から KP への極限

$$\text{HM : } (b-c)\tau(\ell+1)\tau(m+1, n+1) + (c-a)\tau(m+1)\tau(\ell+1, n+1) \\ + (a-b)\tau(n+1)\tau(\ell+1, m+1) = 0$$

2DToda と同様に, 座標変換を行ってから HM の連続極限は比較的に簡単にとれる.

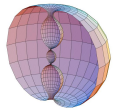
$$\text{三輪変換 : } x_1 = \frac{\ell}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c}, \quad x_2 = \frac{\ell}{2a^2} + \frac{m}{2b^2} + \frac{n}{2c^2}, \quad x_3 = \frac{\ell}{3a^3} + \frac{m}{3b^3} + \frac{n}{3c^3}$$

$$\text{HM 方程式 } (\tau(\ell, m, n)) \xrightarrow{a, b, c \rightarrow \infty} (4D_{x_1} D_{x_3} - D_{x_1}^4 - 3D_{x_2}^2) \tau \cdot \tau = 0 \quad (\tau(x_1, x_2, x_3))$$

$$\text{Lax 形式の連続極限 : } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \phi + u \phi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \phi = \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \phi + \frac{3}{2} u \frac{\partial}{\partial x_1} \phi + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - v \right) \phi \end{cases}$$

$$u(x_1, x_2, x_3) := 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log \tau(x_1, x_2, x_3), \quad v(x_1, x_2, x_3) := 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \log \tau(x_1, x_2, x_3)$$

$$\left(\text{その両立条件 : } \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad 4 \frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 6u \frac{\partial u}{\partial x_1} = 3 \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$$



KP 方程式の Darboux 変換

2DToda の Darboux 変換には離散と連続の表現は両方あり,

$$\tau \mapsto \tau\varphi, \quad \phi \mapsto S_n(\phi) - \phi \frac{S_n(\phi)}{\varphi} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\phi - \phi \frac{\partial}{\partial x} \log \varphi$$

この変換の連続版は HM 方程式の Darboux 変換の連続極限と等しい.

$$\tau \mapsto \tau\varphi, \quad \phi \mapsto c\left(\phi\left(x_1 + \frac{1}{c}\right) - \frac{\phi}{\varphi}\varphi\left(x_1 + \frac{1}{c}\right)\right) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \phi \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\phi - \phi \frac{\partial}{\partial x} \log \varphi$$

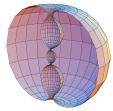
HM の随伴 Lax 形式の連続極限で KP 方程式の随伴 Lax 形式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\phi^* = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\phi^* + u\phi^*, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\phi^* = \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\phi^* + \frac{3}{2}u \frac{\partial}{\partial x_1}\phi^* + \frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + v\right)\phi^*$$

これにより, 次の全微分形式を用いて固有関数ポテンシャル $\Omega(\phi, \phi^*)$ が定義でき,

$$d\Omega = \underline{\phi\phi^*} dx_1 + \left(\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x_1} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) dx_2 + \left(\phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_1} + \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{3}{2}u\phi\phi^*\right) dx_3$$

KP の binary Darboux 変換は 2DToda と同じものである : $\frac{\partial}{\partial x_1}\Omega = \phi\phi^*$



KP 方程式の簡約 : KdV

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \tau = c \tau \quad (c \in \mathbb{C})$$

$$\Rightarrow (4D_{x_1} D_{x_3} - D_{x_1}^4) \tau \cdot \tau = 0 \xrightarrow[x_1=x]{x_3=-4t} (D_x D_t + D_x^4) \tau \cdot \tau = 0 \quad : \text{KdV の双線形形式}$$

この簡約条件の下で, $v = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ となり, さらに KP の固有関数に $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{k^2}{4} \phi$ を

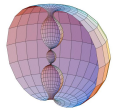
課すと, KdV 方程式の Lax 形式が得られる.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + u \phi = \frac{k^2}{4} \phi \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\left(4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \phi + 6u \frac{\partial}{\partial x} \phi + 3 \frac{\partial u}{\partial x} \phi\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{両立条件}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad : \text{KdV}$$

定理 : 上記の簡約条件は KP の Darboux 変換の下で不変であり, KdV 方程式にも Darboux 変換が存在する.

つまり, $\tau = 1$ のとき, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{k^2}{4} \varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}$ の一般解 $\varphi^{(i)} := \alpha_i e^{\frac{k_i}{2}(x-k_i^2 t)} + \beta_i e^{-\frac{k_i}{2}(x-k_i^2 t)}$

により, KdV の N ソリトン解を生成する τ 関数が得られる : $\tau = \det \left(\frac{\partial^{j-1} \varphi^{(i)}}{\partial x^{j-1}} \right)_{i,j=1..N}$



KdV 方程式の Darboux 変換の解析的な解釈：

KdV の Lax 形式, 特に KdV の固有関数が満たす「スペクトル問題」と呼ばれる方程式

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + u \phi = \frac{k^2}{4} \phi$, は $\phi \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\phi}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ の下で covariant である： $u \mapsto u + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \varphi$.

[Darboux (1889)]

On obtient donc pour Z une solution qui est le produit d'une fonction de $x + y$ par une fonction de $x - y$, c'est-à-dire qui est aussi harmonique.

408. Il est aisé de vérifier le résultat précédent. Si l'on introduit en effet la fonction

$$(8) \quad u = \theta' - \theta \frac{f'}{f},$$

on reconnaît par un calcul facile que l'on a

$$(9) \quad \frac{u''}{u} = f \left(\frac{1}{f} \right)'' + h.$$

On est ainsi conduit au curieux théorème d'Analyse suivant :

Étant donnée l'équation différentielle du second ordre

$$(10) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = [\varphi(t) + h] y,$$

supposons qu'on sache l'intégrer pour toutes les valeurs de h . Soit $f(t)$ une solution de cette équation, correspondante à une valeur particulière de h , par exemple $h = h_1$. On saura aussi intégrer, pour toutes les valeurs de h , l'équation

$$(11) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \left[f \left(\frac{1}{f} \right)'' + h - h_1 \right] y.$$

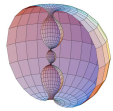
Si y désigne la solution générale de l'équation (10) correspondante à une valeur déterminée de h , différente de h_1 ,

$$(12) \quad y' - y \frac{f'}{f}$$

sera la solution générale de l'équation (11) pour la même valeur de h .

Cette proposition, qu'il est aisé de vérifier directement⁽¹⁾, permet, évidemment, de rattacher à toute équation de la forme (10), que

(¹) On trouvera la démonstration directe dans une Note de l'auteur *Sur une proposition relative aux équations linéaires*, insérée aux *Comptes rendus* (t. XCIV, p. 1456; 1882).



KdV 方程式の Darboux 変換の解析的な解釈：

KdV の Lax 形式, 特に KdV の固有関数が満たす「スペクトル問題」と呼ばれる方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + u \phi = \frac{k^2}{4} \phi, \text{ は } \phi \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\phi}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ の下で covariant である : } u \mapsto u + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \varphi.$$

[Darboux (1889)]

$q(x) \in L_1^1 := \left\{ p(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(1 + |x|) dx < \infty \right\}$ とし, このようなポテンシャル $q(x)$ に依存する自己共役作用素 $H := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ には n 個の束縛状態 $-\beta_n^2 < \dots < -\beta_1^2$ があるとする. (ただし, $\beta_j > 0$ とする.) $\beta > \beta_n$ と置き,

定理：

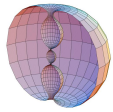
$$H \cdot f_j = -\beta^2 f_j, \quad f_1(x, \beta) \sim e^{-\beta x} \quad (x \rightarrow +\infty), \quad f_2(x, \beta) \sim e^{\beta x} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

をみたす関数 $f_1(x, \beta), f_2(x, \beta)$ と定数 $\alpha > 0$ により, 次の関数を定義する.

$$g_\alpha(x) := f_1(x, \beta) + \alpha f_2(x, \beta), \quad \bar{q}(x) := q(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \log g_\alpha(x)$$

そのとき, $\bar{q}(x) \in L_1^1$ には $n + 1$ 個の束縛状態 $-\beta^2 < -\beta_n^2 < \dots < -\beta_1^2$ がある.

[Deift, Trubowitz (1979)] : [Crum (1955)] ($x \in [0, 1]$), または [Krein (1957)] ($x \in [0, +\infty)$) の拡張.)



KP の 1+1 次元可積分系への簡約化 (その2)

$$“ \tau_{x_n} = c\tau ”$$

より一般的な簡約条件： $\tau_{x_n} = \hat{\tau}$ $\hat{\tau}$: “Darboux 変換による新しい τ 関数”

i) $c\tau$: $\varphi = 0$ による自明な変換 ($\tau \mapsto \tau e^{cx_n}$ は双線形形式の対称性である : $\tau \mapsto c\tau \sim 0$)

ii) $\tau_{x_1} = \tau \phi$: Darboux 変換 $\Rightarrow \phi = \frac{\partial}{\partial x_1} \log \tau$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \phi + u \phi = 0 \xrightarrow{red.} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \phi + 2\phi \frac{\partial}{\partial x_1} \phi = 0 \quad (\text{Burgers 方程式})$$

$$(\text{Burgers 方程式は線形化可能な可積分系である : } \phi = \frac{\partial}{\partial x_1} \log \tau \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} = \gamma(x_2)\tau)$$

iii) ϕ, ϕ^* による binary Darboux 変換を用いて： $\tau_{x_1} = \tau \Omega$ $\Rightarrow u = 2\phi\phi^*$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + u \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x_1^2} - u \phi^* = 0 \end{cases} \xrightarrow{red.} \begin{cases} i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + 2\phi^2 \phi^* = 0 \\ -i \frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x_1^2} + 2\phi \phi^{*2} = 0 \end{cases} \quad \text{NLS 方程式 } (t = ix_2, x = x_1)$$