離散可積分系入門 (I)

(An introduction to discrete integrable systems)

筧 三郎 (立教大学理学部)

九州大学産業技術数理研究センター 第 9 回ワークショップ

離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル

2010 年 2 月 22 日 (月)

Outline

- 微分方程式の「差分化」
  - 「差分化」とは何か？
  - ロジスティック方程式の差分化
- 戸田格子の差分化
  - 双線形形式による差分化
  - ソリトン解の構成
  - 双線形方程式から非線形方程式へ
- Part I のまとめ

§1.1. 微分方程式の「差分化」

微分方程式を「差分化」するとは何をすることかを,

- 指数関数の満たす微分方程式
- ロジスティック方程式

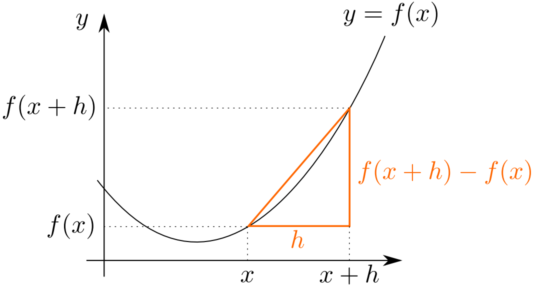
という 2 つの例で説明する.

「差分化」 ＝ 「離散化」 ＝ “discretization”

微分 vs 差分

関数 $f(x)$ の導関数 (高校の復習)

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



微分 vs 差分

関数 $f(x)$ の導関数 (高校の復習)

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

言い換えると，h が 0 に近いときは，

$$\underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{\boxed{\text{微分}}} \fallingdotseq \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\boxed{\text{(前進) 差分}}}$$

であるということ．

指数関数 vs 等比数列 (高校の復習)

等比数列 (初項 a，公比 r)

$$\left\{ar^{n-1}\right\}_{n=1,2,3,\dots} = \left\{a,\ \ ar,\ \ ar^2,\ \ ar^3,\ \ ar^4,\ \ \dots\right\}$$

この等比数列の満たす漸化式 (差分方程式)：

$$a_{n+1} = r a_n$$

指数関数

$$f(x) = e^{kx} \quad (\text{ネイピア数 } e = 2.718281828\cdots,\quad k \text{ は定数})$$

この指数関数の満たす微分方程式：

$$\frac{df(x)}{dx} = k\, f(x)$$

指数関数 vs 等比数列 (「方程式」からながめる)

指数関数 $f(x) = e^{kx}$ (k は定数) の満たす微分方程式の「差分化」

$$\frac{df(x)}{dx} = k\,f(x) \xrightarrow[\text{(前進差分)}]{\text{差分化}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k\,f(x)$$

書き換えると，

$$f(x+h) = (1+kh)f(x)$$

なる差分方程式 (漸化式) が得られる．すなわち，数列

$$\{f(nh),\ n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, f(-h), f(0), f(h), f(2h), \ldots\}$$

は，公比 $r = 1 + kh$ の等比数列である．

指数関数 vs 等比数列 (「方程式」と「解」からながめる)

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\dfrac{df(x)}{dx} = k\,f(x)} & \underset{\text{連続極限}}{\overset{\text{差分化}}{\rightleftharpoons}} & \boxed{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\,f(x)} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\boxed{\text{解：}\ f(x) = e^{kx}} & \underset{\text{連続極限}}{\overset{\text{差分化}}{\rightleftharpoons}} & \boxed{\text{解：}\ f(nh) = (1+kh)^n}
\end{array}
$$

公式 $e = \lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z}$ (e の定義) より，$x = nh$ とおくと，

$$
f(nh) = (1+kh)^n = \left\{(1+kh)^{1/kh}\right\}^{kx} \xrightarrow[h\to 0]{} e^{kx}
$$

微分方程式の「差分化」

「差分化」 ＝ 「離散化」 ＝ “discretization”

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{微分方程式}} & \underset{\text{連続極限}}{\overset{\text{差分化}}{\rightleftharpoons}} & \boxed{\text{差分方程式 (漸化式)}} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\boxed{\text{微分方程式の解 (関数)}} & \underset{\text{連続極限}}{\overset{\text{差分化}}{\rightleftharpoons}} & \boxed{\text{差分方程式の解 (数列)}}
\end{array}
$$

典型的な例

$$
\text{指数関数} \quad \underset{\text{連続極限}}{\overset{\text{差分化}}{\rightleftharpoons}} \quad \text{等比数列}
$$

差分化いろいろ

「微分」を「差分」に置き換える方法は無数にある．

- 前進差分： $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \dfrac{df(x)}{dx}$
- 後退差分： $\dfrac{f(x)-f(x-h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \dfrac{df(x)}{dx}$
- 中心差分： $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \xrightarrow[h\to 0]{} \dfrac{df(x)}{dx}$

また，次のような「乗法的」差分化も考えられる．

- q 差分： $\dfrac{f(x)-f(qx)}{x(1-q)} \xrightarrow[q\to 1]{} \dfrac{df(x)}{dx}$

[演習] 指数関数の微分方程式を，上のそれぞれのやり方で差分化し，得られた差分方程式の解を求めよ．

もう少し難しい例： ロジスティック方程式

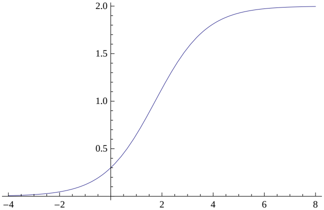
$$\frac{df(x)}{dx} = \alpha f(x)\{1-\beta f(x)\} \qquad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

$\beta = 0$ とすると，さきほどの微分方程式 (指数関数).

この微分方程式は「変数分離法」で解ける.

解：

$$f(x) = \frac{f(0)e^{\alpha x}}{\beta f(0)e^{\alpha x} + 1 - \beta f(0)}$$



「ロジスティック曲線」 or 「S 字曲線」

ロジスティック方程式の差分化 1

$$\frac{df(x)}{dx} = \alpha f(x)\{1-\beta f(x)\} \qquad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

差分化 1 (前進差分)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \alpha f(x)\{1-\beta f(x)\}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x+h) = (1+\alpha h)f(x) - \alpha\beta h f(x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad g_{n+1} = a\, g_n(1-g_n) \quad \text{(ロジスティック写像)}$$

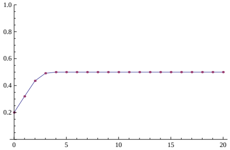
ただし $g_n = \dfrac{\alpha\beta h}{1+\alpha h} f(nh),\ \ a = 1+\alpha h$ とおいた．

ロジスティック方程式の差分化 1

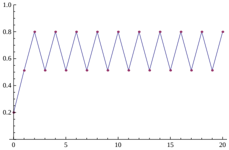
ロジスティック写像： $g_{n+1} = a\,g_n(1-g_n) \quad (0 < a \leqq 4)$

(条件 $0 < a \leqq 4$ は区間 $[0,1]$ 内におさめるため)

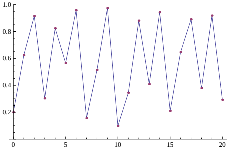
$a = 2.0$



$a = 3.2$



$a = 3.9$



パラメータによっては不規則な振動が発生 $\Rightarrow$ 「カオス」

R.M. May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature* **261** (1976), 459–467.

[演習] 「後退差分」,「中心差分」で計算するとどうなるか？

ロジスティック方程式の差分化 2

ロジスティック方程式の解： $f(x) = \dfrac{f(0)\, e^{\alpha x}}{\beta f(0)\, e^{\alpha x} + 1 - \beta f(0)}$

これを $e^{\alpha x}$ について解くと，

$$e^{\alpha x} = \frac{1-\beta f(0)}{f(0)} \frac{f(x)}{1-\beta f(x)} = (\text{定数}) \times \frac{f(x)}{1-\beta f(x)}$$

となる．このことから，

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-\beta f(x)}$$

は，次の微分方程式を満たすことがわかる．

$$\frac{dg(x)}{dx} = \alpha g(x)$$

ロジスティック方程式の差分化 2

$$\frac{df(x)}{dx} = \alpha f(x)\{1-\beta f(x)\} \xrightarrow[g(x)=\frac{f(x)}{1-\beta f(x)}]{} \frac{dg(x)}{dx} = \alpha g(x)$$

$$\downarrow \text{前進差分}$$

$$\boxed{\frac{f(x+h)}{1-\beta f(x+h)} = \frac{(1+\alpha h)\,f(x)}{1-\beta f(x)}} \xleftarrow[g(x)=\frac{f(x)}{1-\beta f(x)}]{} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \alpha g(x)$$

整理すると，次の関係式が得られる.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \alpha f(x)\{1-\beta f(x+h)\}$$

Cf. M. Morisita, “The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density”, *Res. Popul. Ecol.* **VII** (1965), 52–55.

差分化 1，差分化 2 の比較

- 差分化 1: そのまま (前進) 差分化

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha f(x)\left\{1-\beta f(x)\right\}$$

(パラメータによっては) カオス的な挙動を示す．

- 差分化 2: 変数を置き換えてから (前進) 差分化

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha f(x)\left\{1-\beta\, f(x+h)\right\}$$

パラメータが大きくても “S 字曲線” を再現する．

以下では，差分化 2 のような 元の解の性質を保つ差分化 に注目．

『無限・カオス・ゆらぎ』より

寺本英・広田良吾・武者利光・山口昌哉の 4 名による対談 （培風館，1985）

(41 ページ，広田先生が「差分化」に関する自身の研究を紹介したのを受けて，)

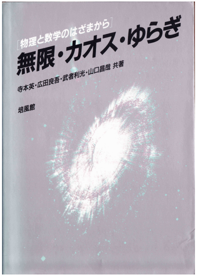
山口 僕と非常に対照的ですね．微分方程式を discrete に直したら，微分方程式の解とまったくちがう性質がでてくる，ということを追求している．

武者 広田さんの仕事は，非常に体系的ですごいですね．

広田 僕は，逆に 元の微分方程式の解の性質を保存するように，どう差分化したらいいか，ということです．

… 《中略》 …

山口 1 つの微分方程式に対して差分化は無限にある．そのいい方をとったら非常に体系的な議論ができる．微分方程式と同じような体系的な議論ができる，というのは広田さんの立場．

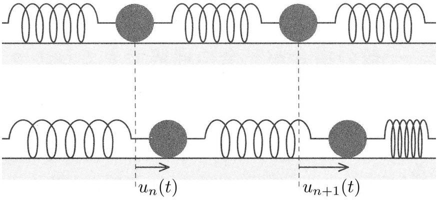


§1.2. 戸田格子の差分化

戸田格子方程式に対して，前節のロジスティック方程式の「差分化 2」のように，解の持つ性質を保存するような差分化を考察する．

戸田格子方程式 (復習)

$u_n(t)$： 時刻 t における n 番目の質点のつり合いの位置からのずれ



運動方程式： $m\dfrac{d^2u_n(t)}{dt^2} = a\left[e^{-b\{u_n(t)-u_{n-1}(t)\}} - e^{-b\{u_{n+1}(t)-u_n(t)\}}\right]$

変数を適当にスケールすれば，次のように $m = a = b = 1$ とすることができる．

$$\frac{d^2q_n(t)}{dt^2} = \left[e^{-\{q_n(t)-q_{n-1}(t)\}} - e^{-\{q_{n+1}(t)-q_n(t)\}}\right]$$

戸田格子方程式 (復習)： いろいろな表示

$$\boxed{\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = \left[e^{-\{q_n(t)-q_{n-1}(t)\}} - e^{-\{q_{n+1}(t)-q_n(t)\}}\right]}$$

$$\Big\downarrow V_n(t)=e^{q_n(t)-q_{n+1}(t)}$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\log\left[1+V_n(t)\right] = V_{n+1}(t)+V_{n-1}(t)-2V_n(t)}$$

$$\Big\downarrow V_n(t)=\frac{d^2}{dt^2}\log f_n(t)$$

$$\boxed{\ddot{f}_n(t)f_n(t)-\left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2 = f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)-\{f_n(t)\}^2}$$

＊ どの変数で差分化を行うかによって，性質は変わってくる．

戸田方程式の広田表示 (双線形方程式)

$$\ddot{f}_n(t) f_n(t) - \left\{ \dot{f}_n(t) \right\}^2 = f_{n+1}(t) f_{n-1}(t) - \{ f_n(t) \}^2$$

左辺は 連続 変数 $t \in \mathbb{R}$ に関する 微分,
右辺は 離散 変数 $n \in \mathbb{Z}$ に関する 差分.

$\Rightarrow$ 左辺も差分化したい.

「良い差分化」の 1 つの例

$$\frac{f_n(t+\delta) f_n(t-\delta) - \{ f_n(t) \}^2}{\delta^2} = f_{n+1}(t) f_{n-1}(t) - \{ f_n(t) \}^2$$

R. Hirota, Nonlinear partial difference equations. II. Discrete-time Toda equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 2074–2086.

離散戸田格子方程式 (双線形形式での連続極限)

[広田 (1977)]

$$\frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)-\{f_n(t)\}^2}{\delta^2}=f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)-\{f_n(t)\}^2$$

$$左辺=\underbrace{\frac{f_n(t+\delta)-2f_n(t)+f_n(t-\delta)}{\delta^2}}_{中心差分}\cdot f_n(t)-\underbrace{\frac{f_n(t+\delta)-f_n(t)}{\delta}}_{前進差分}\cdot\underbrace{\frac{f_n(t)-f_n(t-\delta)}{\delta}}_{後退差分}$$

$$\longrightarrow\ \ddot{f}_n(t)f_n(t)-\left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2\quad(\delta\to 0)$$

極限 $\delta\to 0$ をとると元に戻る.

離散戸田格子方程式 (双線形形式)

[広田 (1977)]

$$\frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)-\{f_n(t)\}^2}{\delta^2}=f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)-\{f_n(t)\}^2$$

この差分化は，元の「戸田格子方程式」が持っていた「良い性質」を受け継いでいる．

- 「連続極限」をとると元に戻る．
- 「N ソリトン解」,「代数幾何的解」を持つ．

1 ソリトン解 (連続の場合の復習)

もとの（連続の）方程式：

$$\ddot{f}_n(t)f_n(t) - \left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2 = f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2$$

"1 ソリトン解" $\boxed{f_n(t) = 1 + \varepsilon f_n^{(1)}(t)}$

この $f_n^{(1)}(t)$ は次の線形方程式を満たすように選ぶ：

$$\ddot{f}_n^{(1)}(t) = f_{n+1}^{(1)}(t) + f_{n-1}^{(1)}(t) - 2f_n^{(1)}(t)$$

具体的には，次のような指数関数を選べばうまくいく：

$$f_n^{(1)}(t) = e^{pn+qt}, \quad q = e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}} = P - \frac{1}{P} \quad (P = e^{\frac{p}{2}})$$

1 ソリトン解 (差分の場合)

差分化した方程式：

$$\frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)-\{f_n(t)\}^2}{\delta^2}=f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)-\{f_n(t)\}^2$$

“1 ソリトン解” $\boxed{f_n(t)=1+\varepsilon f_n^{(1)}(t)}$

この $f_n^{(1)}(t)$ は次の線形方程式を満たすように選ぶ：

$$\frac{f_n^{(1)}(t+\delta)+f_n^{(1)}(t-\delta)-2f_n^{(1)}(t)}{\delta^2}=f_{n+1}^{(1)}(t)+f_{n-1}^{(1)}(t)-2f_n^{(1)}(t)$$

具体的には，次のような等比数列を選べばうまくいく：

$$f_n^{(1)}(t)=P^{2n}Q^{2t/\delta},\quad Q-\frac{1}{Q}=\delta^2\left(P-\frac{1}{P}\right)$$

2 ソリトン解，3 ソリトン解

2 ソリトン解

$$f_n(t) = 1 + \varepsilon\left\{E_1(n,t) + E_2(n,t)\right\} + \varepsilon^2 A_{12} E_1(n,t) E_2(n,t)$$

3 ソリトン解

$$\begin{aligned} f_n(t) = 1 &+ \varepsilon\left\{E_1(n,t) + E_2(n,t) + E_3(n,t)\right\} \\ &+ \varepsilon^2\left\{A_{12}E_1(n,t)E_2(n,t) + A_{13}E_1(n,t)E_3(n,t) + A_{23}E_2(n,t)E_3(n,t)\right\} \\ &+ \varepsilon^3 A_{12}A_{13}A_{23}E_1(n,t)E_2(n,t)E_3(n,t) \end{aligned}$$

	$E_j(n,t)$	関係式	A_{ij}
連続	$c_j P_j^{2n} e^{q_j t}$	$q_j = P_j - \frac{1}{P_j}$	$\left(\frac{P_i - P_j}{1 - P_i P_j}\right)^2$
離散	$c_j P_j^{2n} Q^{2t/\delta}$	$Q_j - \frac{1}{Q_j} = \delta\left(P_j - \frac{1}{P_j}\right)$	$\dfrac{-\left(\frac{Q_i}{Q_j} - \frac{Q_j}{Q_i}\right)^2 + \delta^2\left(\frac{P_i}{P_j} - \frac{P_j}{P_i}\right)^2}{\left(Q_iQ_j - \frac{1}{Q_iQ_j}\right)^2 - \delta^2\left(P_iP_j - \frac{1}{P_iP_j}\right)^2}$

双線形形式に基づく差分化の “レシピ”

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{非線形微分方程式}} & & \boxed{\text{非線形差分方程式}} \\
\text{変数変換}\downarrow & & \uparrow\text{変数変換} \\
\boxed{\text{双線形微分方程式}} & \xrightarrow[\text{持つように差分化}]{\text{“ソリトン解” を}} & \boxed{\text{双線形差分方程式}}
\end{array}
$$

Ryogo Hirota, Nonlinear partial difference equations.

I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 1424–1433.

II. Discrete-time Toda equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 2074–2078.

III. Discrete sine-Gordon equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977), 2079–2086.

IV. Bäcklund transformation for the discrete-time Toda equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **45** (1978), 321-332.

V. Nonlinear equations reducible to linear equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **46** (1979), 312–319.

双線形形式から「V 表示」へ

[広田 (1977)]

$$\frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)-\{f_n(t)\}^2}{\delta^2}=f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)-\{f_n(t)\}^2$$

ここで

$$V_n(t)=\frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)-f_n(t)^2}{\delta^2 f_n(t)^2}=\frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)-f_n(t)^2}{f_n(t)^2}$$

とおけば,

$$1+\delta^2 V_n(t)=\frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)}{f_n(t)^2},\quad 1+V_n(t)=\frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)}{f_n(t)^2}.$$

双線形形式から「V 表示」へ

$$1+V_n(t)=\frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)}{f_n(t)^2},\qquad 1+\delta^2V_n(t)=\frac{f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)}{f_n(t)^2},$$

$$1+V_n(t+\delta)=\frac{f_{n+1}(t+\delta)f_{n-1}(t+\delta)}{f_n(t+\delta)^2},\qquad 1+\delta^2V_{n+1}(t)=\frac{f_{n+1}(t+\delta)f_{n+1}(t-\delta)}{f_{n+1}(t)^2},$$

$$1+V_n(t-\delta)=\frac{f_{n+1}(t-\delta)f_{n-1}(t-\delta)}{f_n(t-\delta)^2},\qquad 1+\delta^2V_{n-1}(t)=\frac{f_{n-1}(t+\delta)f_{n-1}(t-\delta)}{f_{n-1}(t)^2},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\{1+V_n(t+\delta)\}\{1+V_n(t-\delta)\}}{\{1+V_n(t)\}^2}=\frac{\{1+\delta^2V_{n+1}(t)\}\{1+\delta^2V_{n-1}(t)\}}{\{1+\delta^2V_n(t)\}^2}$$

離散戸田格子方程式 [広田 (1977)]

「V 表示」での連続極限

$$\frac{\{1+V_n(t+\delta)\}\{1+V_n(t-\delta)\}}{\{1+V_n(t)\}^2}=\frac{\{1+\delta^2V_{n+1}(t)\}\{1+\delta^2V_{n-1}(t)\}}{\{1+\delta^2V_n(t)\}^2}$$

ここで，

$$\Delta_{t,\delta}F(t)=\frac{F(t+\delta)+F(t-\delta)-2F(t)}{\delta^2},$$
$$\Delta_nF(n)=F(n+1)+F(n-1)-2F(n),$$

という記法を用いると，次の形に書き換えられる：

$$\Delta_{t,\delta}\log\left[1+V_n(t)\right]=\Delta_n\frac{\log\left[1+\delta^2V_n(t)\right]}{\delta^2}$$

「V 表示」での連続極限

$$\Delta_{t,\delta} \log\left[1 + V_n(t)\right] = \Delta_n \frac{\log\left[1 + \delta^2 V_n(t)\right]}{\delta^2}$$

ここで，$\delta \to 0$ の極限を考えると，

$$\lim_{\delta\to 0} \Delta_{t,\delta} \log\left[1 + V_n(t)\right] = \frac{d^2}{dt^2} \log\left[1 + V_n(t)\right],$$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\log\left[1 + \delta^2 V_n(t)\right]}{\delta^2} = V_n(t) \qquad \left(\because\ x \fallingdotseq 0 \text{ なら } \log(1+x) \fallingdotseq x\right)$$

なので，連続の場合の方程式に戻る：

$$\frac{d^2}{dt^2} \log\left[1 + V_n(t)\right] = V_{n+1}(t) + V_{n-1}(t) - 2V_n(t)$$

Part I のまとめ

次の３つの例に対して,

解の持つ性質を保存するような差分化

を考察した：

- 指数関数の満たす微分方程式
- ロジスティック方程式
- 戸田格子方程式