離散可積分系入門 (Appendix)

(An introduction to discrete integrable systems)

筧 三郎 (立教大学理学部)

九州大学産業技術数理研究センター 第 9 回ワークショップ
離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル

2010 年 2 月 22 日 (月)

Outline

“電気回路表示” の差分化

- “電気回路表示” の差分化と固有値保存変形
- 固有値保存変形との関係

三輪変換

§A.1. “電気回路表示” の差分化

戸田方程式に対して，「解の性質を保つ差分化」の 1 つを紹介した。ここでは，差分化された双線形方程式から得られる “差分 I-V 表示” を紹介し，固有値保存変形との関係を解説する。

戸田方程式の差分化 (Part I の復習)

	微分方程式	差分方程式
双線形形式	$\ddot{f}_n(t)f_n(t)-\left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2$ $=f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)-\{f_n(t)\}^2$	$\left[f_n(t+\delta)f_n(t-\delta)-\{f_n(t)\}^2\right]/\delta^2$ $=f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)-\{f_n(t)\}^2$
1 ソリトン解	$f_n(t)=1+cP^{2n}e^{qt}$, $q=P-1/P$	$f_n(t)=1+cP^{2n}Q^{2t/\delta}$, $Q-1/Q=\delta(P-1/P)$
非線形方程式	$\frac{d^2}{dt^2}\log[1+V_n(t)]=\Delta_n V_n(t)$	$\Delta_{t,\delta}\log[1+V_n(t)]$ $=\delta^{-2}\Delta_n\log\left[1+\delta^2V_n(t)\right]$

$f_n(t)$ と $V_n(t)$ との関係は，どちらの場合も次で与えられる：

$$V_n(t)=\frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t)}{\{f_n(t)\}^2}-1\quad\left(\overset{\text{微分の場合}}{=}\frac{d^2}{dt^2}\log f_n(t)\right)$$

非線形方程式の作り方は他にもいろいろある。

別の非線形方程式

次のように $u_n(t)$, $v_n(t)$ を定める：

$$u_n(t) = \frac{f_n(t)f_{n-1}(t+\delta)}{f_{n-1}(t)f_n(t+\delta)}, \quad v_n(t) = \frac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t+\delta)}{f_n(t)f_n(t+\delta)}$$

定義および双線形方程式より，

$$\begin{cases} u_{n+1}(t)v_n(t+\delta) = u_n(t+\delta)v_n(t), \\ (1-\delta^2)u_n(t+\delta) + \delta^2 v_n(t+\delta) = (1-\delta^2)u_n(t) + \delta^2 v_{n-1}(t) \end{cases}$$

が得られる。さらに，

$$u_n(t) = 1 + \delta I_n(t), \quad v_n(t) = 1 + V_n(t)$$ (注：さきほどの $V_n(t)$ とは別)

とすると，

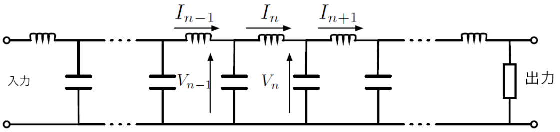
$$\begin{cases} \delta^{-1}\left\{V_n(t+\delta) - V_n(t)\right\} = I_n(t+\delta)\left\{1 + V_n(t)\right\} - I_{n+1}(t)\left\{1 + V_n(t+\delta)\right\} \\ (1-\delta^2)\delta^{-1}\left\{I_n(t+\delta) - I_n(t)\right\} = V_{n-1}(t) - V_n(t) \end{cases}$$

別の非線形方程式 (連続極限)

$$\begin{cases} \dfrac{V_n(t+\delta)-V_n(t)}{\delta} = I_n(t+\delta)\{1+V_n(t)\} - I_{n+1}(t)\{1+V_n(t+\delta)\}, \\ (1-\delta^2)\dfrac{I_n(t+\delta)-I_n(t)}{\delta} = V_{n-1}(t) - V_n(t) \end{cases}$$

連続極限 $\delta \to 0$ をとると，

$$\begin{cases} \dfrac{dV_n(t)}{dt} = \{I_n(t) - I_{n+1}(t)\}\{1+V_n(t)\}, \\ \dfrac{dI_n(t)}{dt} = V_{n-1}(t) - V_n(t) \end{cases}$$



差分 I-V 表示に対する「離散 Lax 方程式」

無限行列 $\mathcal{U}(t)$, $\mathcal{V}(t)$ を

$$\mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ & u_{n-1}(t) & \delta & & \\ & & u_n(t) & \delta & \\ & & & u_{n+1}(t) & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}(t) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & \delta^2-1 & & & \\ & \delta v_{n-1}(t) & \delta^2-1 & & \\ & & \delta v_n(t) & \delta^2-1 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

で定めると,

$$\boxed{\mathcal{U}(t)\mathcal{V}(t+\delta) = \mathcal{V}(t)\mathcal{U}(t+\delta)} \quad \text{(離散 Lax 方程式)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_{n+1}(t)v_n(t+\delta) = u_n(t+\delta)v_n(t), \\ (1-\delta^2)u_n(t+\delta) + \delta^2 v_n(t+\delta) = (1-\delta^2)u_n(t) + \delta^2 v_{n-1}(t) \end{cases}$$

「LR 法」との関係

(ここでは $\mathcal{U}(t)$, $\mathcal{V}(t)$ を有限正方行列として考える。)

積 $\mathcal{U}(t)\mathcal{V}(t+\delta)$ は次の形となる：

$$\mathcal{U}(t)\mathcal{V}(t+\delta) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \alpha_{n-1}(t) & \delta(\delta^2-1) & & \\ & \beta_{n-1}(t) & \alpha_n(t) & \delta(\delta^2-1) & \\ & & \beta_n(t) & \alpha_n(t) & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

逆に言えば，この３重対角行列の LR 分解 (or Gauss 分解) を考えていることになる。

離散 Lax 方程式 $\mathcal{U}(t)\mathcal{V}(t+\delta) = \mathcal{V}(t)\mathcal{U}(t+\delta)$ は，上の形の３重対角行列の固有値を求める際の「LR 法」と呼ばれる数値計算アルゴリズムと同じことである。

「離散 Lax 方程式」の連続極限

(ここでは $\mathcal{U}(t)$, $\mathcal{V}(t)$ を有限正方行列として考える。)

$\mathcal{V}(t)$ の逆行列をとって，“Lax 行列” $\mathcal{L}(t)$ を次で定める：

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{V}(t)^{-1}\mathcal{U}(t)$$

すると，離散 Lax 方程式 $\mathcal{U}(t)\mathcal{V}(t+\delta) = \mathcal{V}(t)\mathcal{U}(t+\delta)$ により，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) = \mathcal{V}(t)^{-1}\mathcal{U}(t) &= \mathcal{U}(t+\delta)\mathcal{V}(t+\delta)^{-1} \\ &= \mathcal{V}(t+\delta)\mathcal{L}(t+\delta)\mathcal{V}(t+\delta)^{-1}\end{aligned}$$

となる。すると，

$$\begin{aligned}\det\left[\lambda\mathcal{I} - \mathcal{L}(t)\right] &= \det\left[\mathcal{V}(t+\delta)\left\{\lambda\mathcal{I} - \mathcal{L}(t+\delta)\right\}\mathcal{V}(t+\delta)^{-1}\right] \\ &= \det\left[\lambda\mathcal{I} - \mathcal{L}(t+\delta)\right],\end{aligned}$$

すなわち，$\mathcal{L}(t)$ と $\mathcal{L}(t+\delta)$ の固有多項式は一致する (固有値保存変形)。

「離散 Lax 方程式」の連続極限

離散 Lax 方程式： $\mathcal{V}(t+\delta)\mathcal{L}(t+\delta) = \mathcal{L}(t)\mathcal{V}(t+\delta)$

これは，線形方程式系

$$\mathcal{L}(t)\vec{\Psi}(t) = \lambda\vec{\Psi}(t), \quad \vec{\Psi}(t+\delta) = \mathcal{V}(t+\delta)\vec{\Psi}(t)$$

の両立条件として得られる。

また $\mathcal{V}(t) = -\mathcal{I} + \delta\mathcal{B}(t)$ として連続極限 $\delta \to 0$ をとると，

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}(t+\delta)\mathcal{L}(t+\delta) = \mathcal{L}(t)\mathcal{V}(t+\delta) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\mathcal{L}(t+\delta) - \mathcal{L}(t)}{\delta} = \mathcal{B}(t+\delta)\mathcal{L}(t+\delta) - \mathcal{L}(t)\mathcal{B}(t+\delta) \\ \xrightarrow{\delta\to 0} \quad & \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} = [\mathcal{B}(t), \mathcal{L}(t)] \end{aligned}$$

(連続の場合のLax 方程式)

I-V 表示： 連続 vs 離散

	連続	離散
双線形	$\ddot{f}_n(t)f_n(t) - \left\{\dot{f}_n(t)\right\}^2 = f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2$	$\left[f_n(t+\delta)f_n(t-\delta) - \{f_n(t)\}^2\right]/\delta^2 = f_{n+1}(t)f_{n-1}(t) - \{f_n(t)\}^2$
非線形	$\begin{cases} \dfrac{dV_n(t)}{dt} = \{I_n(t) - I_{n+1}(t)\} \times \{1 + V_n(t)\}, \\ \dfrac{dI_n(t)}{dt} = V_{n-1}(t) - V_n(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \delta^{-1}\{V_n(t+\delta) - V_n(t)\} = I_n(t+\delta)\{1 + V_n(t)\} - I_{n+1}(t)\{1 + V_n(t+\delta)\}, \\ (1-\delta^2)\delta^{-1}\{I_n(t+\delta) - I_n(t)\} = V_{n-1}(t) - V_n(t) \end{cases}$
変換	$V_n(t) = \dfrac{f_{n-1}(t)f_{n+1}(t)}{f_n(t)^2} - 1,$ $I_n(t) = \dfrac{d}{dt}\log\dfrac{f_{n-1}(t)}{f_n(t)}$	$V_n(t) = \dfrac{f_{n+1}(t)f_{n-1}(t+\delta)}{f_n(t)f_n(t+\delta)} - 1,$ $I_n(t) = \dfrac{1}{\delta}\left\{\dfrac{f_n(t)f_{n-1}(t+\delta)}{f_{n-1}(t)f_n(t+\delta)} - 1\right\}$
Lax 表示	$\mathcal{U}(t)\mathcal{V}(t+\delta) = \mathcal{V}(t)\mathcal{U}(t+\delta)$	$\dfrac{d\mathcal{L}(t)}{dt} = [\mathcal{B}(t), \mathcal{L}(t)]$

これらの「2 次元化」を考えることもできる。

§A.2. “三輪変換” とは

差分化されたソリトン方程式の「ソリトン解」は，連続の場合の指数関数を等比数列で置き換えたものとなった。この置き換えを「変数変換」としてとらえるのが「三輪変換」である。このことについて簡単に解説する。

指数関数 vs 等比数列

	微分	(後退) 差分
方程式	$\dfrac{df(t)}{dt} = pf(t)$	$\dfrac{f(t) - f(t-\delta)}{\delta} = pf(t)$
解 $f(t)$	e^{pt}	$(1-\delta p)^{-\frac{t}{\delta}}$

双線形 2 次元戸田方程式の行列式解の成分

微分： $f_n(x,y) = p^n e^{px} e^{-py} + cq^n e^{qx} e^{-qy}$

差分： $f_n(x,y) = p^n (1-ap)^{-\frac{x}{a}} \left(1+\dfrac{b}{p}\right)^{-\frac{y}{b}} + c\,q^n (1-aq)^{-\frac{x}{a}} \left(1+\dfrac{b}{q}\right)^{-\frac{y}{b}}$

この「置き換え」を「変数変換」としてとらえるのが「三輪変換」

三輪変換

$-\log(1-z)$ のマクローリン展開

$$-\log(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$$

$z = a_j p$ を代入して ℓ_j 倍してから j について和を取る：

$$-\ell_j \sum_j \log(1 - a_j p) = p \underbrace{\sum_j \ell_j a_j}_{t_1\text{とおく}} + p^2 \underbrace{\sum_j \frac{\ell_j a_j^2}{2}}_{t_2\text{とおく}} + p^3 \underbrace{\sum_j \frac{\ell_j a_j^3}{3}}_{t_3\text{とおく}} + \cdots$$

$$= pt_1 + p^2 t_2 + p^3 t_3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e^{pt_1 + p^2 t_2 + p^3 t_3 + \cdots} = \prod_j (1 - a_j p)^{-\ell_j}} \quad \text{(三輪変換)}$$

三輪変換

ここでは $\sum_j$ を省いて考える.

$$\boxed{\exp\left(pt_1+p^2t_2+p^3t_3+\cdots\right)=(1-ap)^{-\ell}}$$

離散 2 次元戸田方程式の行列式解の成分

$$f_n(x,y)=p^n\underline{(1-ap)^{-\frac{x}{a}}}\underline{\left(1+\frac{b}{p}\right)^{-\frac{y}{b}}}+c\,q^n\underline{(1-aq)^{-\frac{x}{a}}}\underline{\left(1+\frac{b}{q}\right)^{-\frac{y}{b}}}$$

$$=p^n\underline{\exp\left(pt_1+p^2t_2+\cdots\right)}\,\underline{\exp\left(\frac{1}{p}\bar{t}_1+\frac{1}{p^2}\bar{t}_2+\cdots\right)}$$

$$+c\,q^n\underline{\exp\left(qt_1+q^2t_2+\cdots\right)}\,\underline{\exp\left(\frac{1}{q}\bar{t}_1+\frac{1}{q^2}\bar{t}_2+\cdots\right)}$$

t_1, $\bar{t}_1$ のみに注目すると，連続の場合の行列式解の成分と一致する.